מבחן מס' 1

פתרון שאלה מס' 1

א. 1)

	כמות	מחיר לשמלה	סה"כ
קנייה	$\frac{960}{x}$	x	960
מכירה	2	0	0
	$\frac{960}{x}-2$	$\frac{180}{100}\cdot x=1.8x$	$1.8x\cdot(\frac{960}{x}-2)$

הרווח של המעצבת הוא ההפרש בין סה"כ ההכנסות מהמכירה לבין ההוצאות עבור הקנייה, לכן:

$$1.8x\cdot(\frac{960}{x}-2)-960=480\Rightarrow\frac{1728x}{x}-3.6x=1440\Rightarrow$$

$1728-3.6x=1440\Rightarrow3.6x=288\Rightarrow x=80\Rightarrow$ המעצבת שילמה **80** ₪ עבור כל שמלה

2) מספר השמלות שתפרה המעצבת: $\frac{960}{x}=\frac{960}{80}=\mathbf{12}$

ב.

	כמות	מחיר לשמלה	סה"כ
קנייה	12	80	960
מכירה	10	$1.8\cdot80=144$	1440
	2	$\frac{135}{100}\cdot80=108$	216

ההכנסה הכוללת של המעצבת: 1440 + 216 = 1656 ₪

הרווח הכולל של המעצבת: 1656 – 960 = 696 ₪

אחוז הרווח הכולל: $\frac{696}{960}\cdot100\%=\mathbf{72.5\%}$

פתרון שאלה מס' 2

א. AB מאונך לישר BC . שיפוע הישר BC הוא $\frac{1}{2}$ לכן שיפוע הישר AB הוא 2 - .

ניעזר בנקודה B(8;2) ונקבל: $y - 2 = -2(x - 8)$ ⇐ משוואת AB : $\mathbf{y = -2x + 18}$

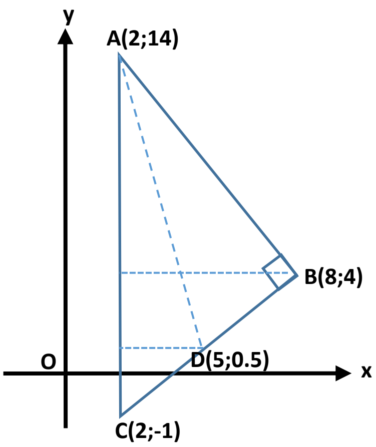
ב. 1) הנקודה A נמצאת על הישר AB . $y_A = 14 \Rightarrow 14 = -2x_A + 18 \Rightarrow 2x_A = 4 \Rightarrow \mathbf{x_A = 2}$

2) קיבלנו A(2;14) . הישר AC מקביל לציר ה- y ולכן לנקודות A ו- C יש אותו שיעור x .

מקבלים $x_C = 2$. נציב במשוואת הישר BC ונקבל $y_C = \frac{1}{2}\cdot 2 - 2 = -1 \Rightarrow \mathbf{C(2;-1)}$.

ג. <u>דרך א'</u> : שיעורי הנקודה D :

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5 \ , \ y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow D(5;\frac{1}{2})$$



שטח המשולש DBC : $S_{\Delta ABD} = \frac{AB\cdot BD}{2}$.

$$AB = \sqrt{(2-8)^2 + (14-2)^2} = \sqrt{180} \ ,$$

$$BD = \sqrt{(8-5)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{45}}{2} \Rightarrow S_{\Delta ABD} = \frac{\sqrt{180}\cdot\frac{\sqrt{45}}{2}}{2} = 22.5$$

$\Rightarrow \mathbf{S_{\Delta ABD} = 22.5}$

<u>דרך ב'</u>: AC = 14+1 = 15 , הגובה לצלע AC במשולש ABC

הוא 6 = 2 – 8 לכן שטח המשולש ABC הוא $\frac{15\cdot 6}{2} = 45$

הגובה לצלע AC במשולש ADC הוא 3 = 2 - 5 לכן שטח המשולש ADC הוא $\frac{15\cdot 3}{2} = 22.5$.

מקבלים: $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADC} = 45 - 22.5 = \mathbf{22.5}$

פתרון שאלה מס' 3

א. המעגל עובר דרך הנקודה (-3;0) לכן:

$$(-3+6)^2+(0-4)^2=R^2 \Rightarrow 9+16=R^2 \Rightarrow R^2=25 \Rightarrow \mathbf{R=5}$$

ב. משוואת המעגל: $(x+6)^2+(y-4)^2=25$

הנקודה B : $y=0 \Rightarrow (x+6)^2+(0-4)^2=25 \Rightarrow (x+6)^2+16=25 \Rightarrow (x+6)^2=9$

$\Rightarrow x+6=3 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow A(-3;0)$ או $x+6=-3 \Rightarrow x=-9 \Rightarrow \mathbf{B(-9;0)}$

ג. 1) המשיק מאונך לרדיוס MB . שיפוע הרדיוס MB : $m_{MB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4-0}{-6+9}=\frac{4}{3}$

$\Leftarrow m_{BC}=-\frac{3}{4} \Leftarrow$ משוואת המשיק BC : $y-0=-\frac{3}{4}(x+9) \Leftarrow \mathbf{y=-\frac{3}{4}x-6.75}$

2) חיתוך עם ציר ה- y : נציב $x=0$ במשוואת המשיק ונקבל $y=-6.75$.

מתקבלת הנקודה **C(0;-6.75)** .

ד. 1) מצאנו כי שיפוע הישר MB הוא $\frac{4}{3}$, לכן משוואת הישר MB היא $y-0=\frac{4}{3}(x+9) \Leftarrow$

$y=\frac{4}{3}x+12 \Leftarrow$ עבור $x=0$ מקבלים $y=12$ לכן **D(0;12)**

2) $DC=12+6.75=18.75$. אורך הגובה לצלע DC הוא מרחק הנקודה M(-6;4) מציר ה- y כלומר 6 . מקבלים: $S_{\Delta DMC}=\frac{18.75\cdot 6}{2}=\mathbf{56.25}$

פתרון שאלה מס' 4

א. תחום ההגדרה: $x \neq 0$

ב. $f'(x) = 0.2 - \frac{5}{x^2} = 0 \Rightarrow 0.2x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 0.2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x_1 = 5 \; , \; x_2 = -5$

נמצא את שיעורי ה- y של הנקודות :

$$f(5) = 0.2 \cdot 5 + \frac{5}{5} + 2 = 4 \;\Rightarrow (5;4), \;\; f(-5) = 0.2 \cdot (-5) + \frac{(-5)}{5} + 2 = 0 \Rightarrow (-5;0)$$

נזהה את סוג הקיצון:

$$f'(-6) = 0.2 - \frac{5}{(-6)^2} = 0.06 \;, \;\; f'(-1) = 0.2 - \frac{5}{(-1)^2} = -4.8 \;,$$

$$f'(1) = 0.2 - \frac{5}{(1)^2} = -0.48 \;, \;\; f'(6) = 0.2 - \frac{5}{(6)^2} = 0.06$$

x	x < -5	-5	< x <	0	< x >	5	x > 5
f '(x)	+	0	-		-	0	+
f(x)	↗	Max	↘		↘	min	↗

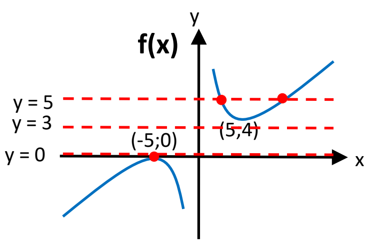
קיבלנו: **(5;4) נקודת מינימום , (-5;0) נקודת מקסימום**

ג. 1) גרף הפונקציה נמצא מתחת לציר ה- x בתחום $x < 0$,
לכן , **f(x) שלילית** בנקודה שבה $x = -7$.
2) הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום $x < -5$, לכן , בנקודה שבה $x = -7$ **f '(x) חיובית**.

ד. הגרף המתאים : **גרף III** . נימוק: הגרף תואם את שיעורי נקודות הקיצון , את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
גרף I לא מתאים כי בתחום $x > 0$ יש לפונקציה נקודת מינימום ולא מקסימום
גרף II לא מתאים כי שיעור ה- y של נקודת המינימום חיובי ושיעור ה- y של נקודת המקסימום הוא 0.
גרף IV לא מתאים כי נקודת המקסימום צריכה להיות על ציר ה- x ולא מתחתיו

ה. הישר 3) חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ישר 1) חותך את גרף הפונקציה רק בנקודה אחת- נקודת המקסימום של הפונקציה, ישר 2) כלל לא חותך את גרף הפונקציה.



פתרון שאלה מס' 5

א. $f(x) = -2x^2 - 12x - 10 \Rightarrow f'(x) = -4x - 12$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x - 12 = 0 \Rightarrow -4x = 12 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow$

$y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = 8 \Rightarrow \mathbf{A(-3;8)}$

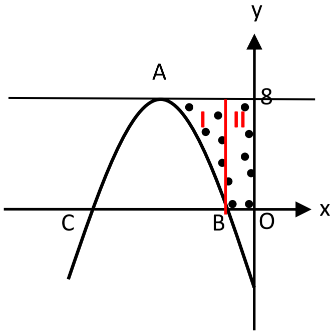
ב. נציב $f(x) = 0$:

$$-2x^2 - 12x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -1\ ,\ x_2 = -5 \Rightarrow \mathbf{B(-1;0)\ ,\ C(-5;0)}$$

ג. שיפוע המשיק בנקודה A – נקודת הקיצון של הפונקציה הוא 0 . משוואת המשיק :

$y - 8 = 0 \Rightarrow \mathbf{y = 8}$



ד. נפצל את החישוב לשני שטחים S_I ו- S_{II} :

S_I הוא השטח המוגבל בין שתי הפונקציות :

המשיק $y = 8$, הפונקציה $f(x)$.

$$S_I = \int_{-3}^{-1}\left[8 - \left(-2x^2 - 12x - 10\right)\right]dx = \int_{-3}^{-1}\left(8 + 2x^2 + 12x + 10\right)dx =$$

$$\int_{-3}^{-1}\left(2x^2 + 12x + 18\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 18x\right]_{-3}^{-1} =$$

$$\left[\frac{2\cdot(-1)^3}{3} + \frac{12\cdot(-1)^2}{2} + 18\cdot(-1)\right] - \left[\frac{2\cdot(-3)^3}{3} + \frac{12\cdot(-3)^2}{2} + 18\cdot(-3)\right] =$$

$$-12\frac{2}{3} - (-18) = 5\frac{1}{3}$$

S_{II} הנו שטח של מלבן שרוחבו $OB = 1$ וגובהו 8 לכן $S_{II} = 8$.

מקבלים : $S_I + S_{II} = 5\frac{1}{3} + 8 = \mathbf{13\frac{1}{3}}$

פתרון שאלה מס' 6

א. מציאת נקודות החיתוך של הפונקציות $f(x) = -x^3 + 15x$ ו- $g(x) = -x^3 - 3x^2$:

$$-x^3 + 15x = -x^3 - 3x^2 \Rightarrow 15x = -3x^2 \Rightarrow 15x + 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$3x(5 + x) = 0 \Rightarrow 3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ ;\ 5 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -5$$

נמצא את שיעור ה- y של הנקודות : $f(0) = 0\ ,\ f(-5) = -(-5)^3 + 15(-5) = 50$

מתקבלות הנקודות **$Q(0;0)$, $P(-5;50)$** .

ב. 1) שיעורי הנקודה A הנמצאת על הפונקציה $g(x)$: $A(x; -x^3 - 3x^2)$.

שיעורי הנקודה B הנמצאת על הפונקציה $f(x)$: $B(x; -x^3 + 15x)$.

אורך הקטע AB הוא ההפרש בין שיעור ה- y של הנקודה A לשיעור ה- y של הנקודה B :

$$d_{AB} = (-x^3 - 3x^2) - (-x^3 + 15x) = -x^3 - 3x^2 + x^3 - 15x \Rightarrow d_{AB} = -3x^2 - 15x$$

נמצא את הערך של x עבורו אורך הקטע AB מקסימלי:

$$d_{AB} = -3x^2 - 15x \Rightarrow (d_{AB})' = -6x - 15 = 0 \Rightarrow -6x = 15 \Rightarrow x = -2.5$$

נזהה את סוג הקיצון:

x	0	-5 < x < -2.5	-2.5	-2.5 < x < 0
d '		+	0	-
d		↗	Max	↘

מקבלים : אורך הקטע AB מקסימלי כאשר שיעור ה- x של הנקודות A ו- B הוא **- 2.5** .

2) אפשרות אחת: למצוא את שיעורי ה- y הנקודות A ו- B עבור $x = -2.5$ ולחשב את ההפרש ביניהם :

$$g(-2.5) = -(-2.5)^3 - 3(-2.5)^2 = -3.125$$

$$f(-2.5) = -(-2.5)^3 + 15(-2.5) = -21.875 .$$

מקבלים : $AB = -3.125 - (-21.875) = \mathbf{18.75}$.

אפשרות שנייה (עדיפה): להציב $x = -2.5$ באורך הקטע AB שמצאנו בסעיף הקודם:

$$d_{AB} = -3x^2 - 15x \Rightarrow d(-2.5) = -3(-2.5)^2 - 15(-2.5) = \mathbf{18.75}$$

בהצלחה!

מבחן מס' 2

פתרון שאלה מס' 1

א. 1) מחיר מנת צ'יפס = 15 ₪ . מחיר מנת פיצה גבוה ב- 20% ממחיר מנת צ'יפס , לכן:

$18 = 15 \cdot \frac{120}{100} \Leftarrow$ מחיר מנת פיצה הוא **18 ₪**.

2) נסמן ב- x את מספר מנות הצ'יפס שהוזמנו. על כן , מספר מנות הפיצה שהוזמנו הוא $7 - x$. מקבלים :

		כמות	מחיר יחידה (₪)	סה"כ (₪)
רשת מזון א'	פיצות	$7 - x$	18	$18(7 - x)$
	צ'יפס	x	15	15x

מתקבלת המשוואה : $18(7 - x) + 15x = 117$

מכאן: $126 - 18x + 15x = 117$

$-3x = -9$

$x = 3$

תשובה: קבוצת החברים הזמינה **3 מנות צ'יפס**

ב. 1) ברשת המזון השנייה:

מחיר מנת פיצה הוא $18 \cdot \frac{120}{100} = 21.6$ ₪ , ומחיר מנת צ'יפס הוא $15 \cdot \frac{90}{100} = 13.5$ ₪ .

		כמות	מחיר יחידה (₪)	סה"כ (₪)
רשת מזון א'	פיצות	4	21.6	$21.6 \cdot 4 = 86.4$
	צ'יפס	3	13.5	$13.5 \cdot 3 = 40.5$

מחיר ההזמנה כולה ברשת השנייה הוא: $86.4 + 40.5 = \mathbf{126.9}$ ₪

2) אילו הזמינו החברים את מנות האוכל ברשת השנייה, היו משלמים $126.9 - 117 = 9.9$ שקלים יותר. ההפסד במקרה זה מהווה $\frac{9.9}{117} \cdot 100\% = \mathbf{8.46\%}$ מן המחיר ששילמו במקור.

פתרון שאלה מס' 2

א. הנקודה A נמצאת על הישרים y = 3x -3 ו- y = 15 , לכן :
x = 6 ⇐ 3x-3 = 15 . מתקבל: **A(6;15)**

הנקודה E היא אמצע האלכסון AC לכן: $9=\frac{15+y_C}{2}\Rightarrow y_C=3$, $4=\frac{6+x_C}{2}\Rightarrow x_C=2$.

מקבלים **C(2;3)**

ב. אלכסוני המעוין מאונכים זה לזה. שיפוע האלכסון AC הוא 3 , לכן ,

שיפוע האלכסון BD הוא $-\frac{1}{3}$. משוואת האלכסון BD :

$$y-9=-\frac{1}{3}(x-4)\Rightarrow \mathbf{y=-\frac{1}{3}x+10\frac{1}{3}}$$

ג. $x_B=1\Rightarrow y_B=-\frac{1}{3}+10\frac{1}{3}=10\Rightarrow \mathbf{B(1;10)}$

$$\Rightarrow 4=\frac{1+x_D}{2}\Rightarrow x_D=7\ ,\ 9=\frac{10+y_D}{2}\Rightarrow y_D=8\Rightarrow \mathbf{D(7;8)}$$

ד. 1) במעוין כל הצלעות שוות . חישוב אורך הצלע AB :

$$A(6;15)\ ,\ B(1;10)\Rightarrow AB=\sqrt{(6-1)^2+(15-10)^2}=5\sqrt{2}$$

היקף המעוין הוא $4\cdot 5\sqrt{2}=\mathbf{20\sqrt{2}}$

2) שטח המעוין הוא : $\frac{AC\cdot BD}{2}$ (מחצית מכפלת האלכסונים)

או: $2\cdot S_{ABD}=2\cdot\frac{AE\cdot BD}{2}=AE\cdot BD$

$$A(6;15)\ ,\ E(4;9)\Rightarrow AE=\sqrt{(6-4)^2+(15-9)^2}=2\sqrt{10}$$

$$B(1;10)\ ,\ D(7;8)\Rightarrow AD=\sqrt{(1-7)^2+(10-8)^2}=2\sqrt{10}$$

$$S_{ABCD}=\mathbf{40}$$

פתרון שאלה מס' 3

א. 1) אורך רדיוס המעגל הוא אורך הקטע OM לכן:

$$O(0;0)\ ,\ M(5;12)\ \Rightarrow OM=\sqrt{5^2+12^2}=\mathbf{13}$$

2) משוואת המעגל: $\mathbf{(x-5)^2+(y-12)^2=169}$

ב. 1) AM מאונך לציר ה- x לכן שיעור ה- x של הנקודה A שווה לשיעור ה- x של הנקודה M
$\Leftarrow \mathbf{x_A=5}$.

2) AM רדיוס המעגל שאורכו 13 , לכן, שיעור ה- y של הנקודה A גדול ב- 13
משיעור ה- y של הנקודה M $\Leftarrow y_A=12+13=25 \Leftarrow \mathbf{y_A=25}$.

ג. 1) O(0;0) , M(5;12) לכן שיפוע הרדיוס OM הוא $m_{OM}=\frac{12}{5}$. המשיק מאונך לרדיוס ,
לכן שיפוע המשיק למעגל בנקודה O הוא $\mathbf{-\frac{5}{12}}$.

2) משוואת המשיק: $y-0=-\frac{5}{12}(x-0)\Rightarrow \mathbf{y=-\frac{5}{12}x}$

ד. 1) שיעור ה- x של הנקודה B שווה לשיעור ה- x של הנקודה M. הנקודה B
נמצאת על המשיק לכן: $y_B=-\frac{5}{12}\cdot 5=-2\frac{1}{12} \Leftarrow$

$$MB=y_M-y_B=12+2\frac{1}{12}=\mathbf{14\frac{1}{12}}$$

2) הגובה לצלע MB במשולש OMB שווה לשיעור ה- x של הנקודות M ו- B , כלומר 5. מקבלים
:

לכן $S_{\Delta OMB}=\frac{14\frac{1}{12}\cdot 5}{2}=35\frac{5}{12}\approx \mathbf{35.21}$

פתרון שאלה מס' 4

א. הפונקציה מוגדרת עבור $\mathbf{x \geq 0}$.

ב. 1) למציאת נקודות קיצון פנימיות נשווה את הנגזרת של הפונקציה לאפס:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow$$

$y = \frac{1}{2} \cdot 16 - 4\sqrt{16} = -8$. התקבלה הנקודה $(16;-8)$.

נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה:

x	0	$0 < x < 16$	16	$16 < x$
f '		-	0	+
f		↘	min	↗

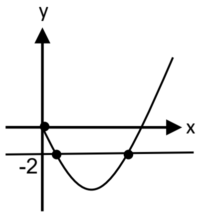
מסקנה: הנקודה **$(16;-8)$ היא נקודת מינימום** פנימית של הפונקציה

2) **תחום העלייה:** $\mathbf{x > 16}$, **תחום הירידה:** $\mathbf{0 < x < 16}$

ג. $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - 4\sqrt{0} = 0 \Rightarrow \mathbf{(0;0)}$

ד. הגרף המתאר פונקציה שנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y היא $(0;0)$ ויש לה נקודת מינימום פנימית ברביע הרביעי (x חיובי, y שלילי). מתאים להיות **גרף (3).**

ה. הישר $y = -2$ עובר בין נקודת המינימום ונקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y ,
לכן הוא חותך את הגרף **בשתי נקודות.**



פתרון שאלה מס' 5

א. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x) = x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 - 4 = -4.5 \Rightarrow$ התקבלה הנקודה $\mathbf{A(1;-4.5)}$

ב. 1) לקבלת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B צריך להציב את שיעור ה- x של הנקודה בנגזרת $f'(x)$: $f'(x) = x - 1 \Rightarrow f'(6) = 6 - 1 = \mathbf{5}$

2) שיעור ה- y של הנקודה B : $f(6) = \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 - 4 = 8 \Rightarrow B(6;8)$.

משוואת המשיק בנקודה B : $\mathbf{y = 5x - 22} \Leftarrow y - 8 = 5(x - 6) \Rightarrow y = 5x - 30 + 8 \Rightarrow$.

ג. משוואת הישר המקביל לציר ה- y בנקודה A היא $x = 1$. מקבלים:

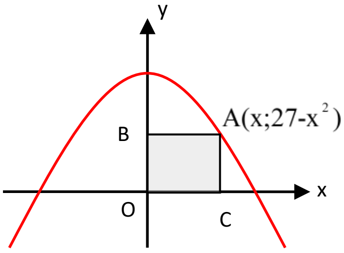
$$S = \int_1^6 \left[(\frac{1}{2}x^2 - x - 4) - (5x - 22) \right] dx = \int_1^6 \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 4 - 5x + 22 \right) dx =$$

$$\int_1^6\left(\frac{1}{2}x^2-6x+18\right)dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}+18x\right]_1^6=\left[\frac{x^3}{6}-3x^2+18x\right]_1^6=$$

$$=\left(\frac{6^3}{6}-3\cdot6^2+18\cdot6\right)-\left(\frac{1^3}{6}-3\cdot1^2+18\cdot1\right)=\frac{125}{6}=\mathbf{20\frac{5}{6}}$$

פתרון שאלה מס' 6

פתרון:



א. נסמן את שיעורי הנקודה A : $A(x;27-x^2)$

ומכאן: $OC = x$, $OB = 27 - x^2$

ולכן הפונקציה המבטאת את שטח המלבן היא:

$f(x) = x(27 - x^2) \Rightarrow \mathbf{f(x) = 27x - x^3}$

ב. נמצא את נקודת המקסימום של הפונקציה:

$y' = 27 - 3x^2 \Rightarrow 27 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3\ ,\ x_2 = -3$

נבדוק האם בנקודה $x = 3$ הנמצאת מימין לראשית יש לפונקציה נקודת מקסימום:

$y''(x) = -6x$

$y''(3) = -18 < 0$

כלומר, נקודת מקסימום

מכאן: כאשר שיעורי הנקודה A הם: **(3;18)** שטח המלבן יהיה מקסימלי.