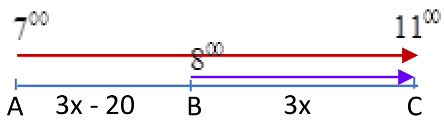
מבחן מתכונת מס' 1

פתרון שאלה מס' 1

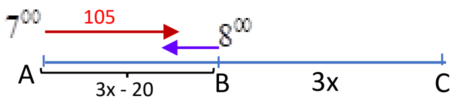


א.

	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
מכונית א'	v	4	6x - 20
מכונית ב'	x	3	3x

נסמן ב- v את המהירות של מכונית א' ונקבל:

$4v = 6x - 20 \Rightarrow v = \mathbf{1.5x - 5}$



ב. 1) המרחק שעברה מכונית ב' עד שחלפה על פני מכונית א':

$3x - 20 - 105 = \mathbf{3x - 125}$

	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
מכונית א'	$1.5x - 5$	$\frac{105}{1.5x-5}$	105
מכונית ב'	x	$\frac{3x-125}{x}$	3x-125

מקבלים: $\frac{3x-125}{x} + 1 = \frac{105}{1.5x-5} \Leftarrow$

$105x = (3x-125)(1.5x-5) + x(1.5x-5) \Rightarrow$

$105x = 4.5x^2 - 15x - 187.5x + 625 + 1.5x^2 - 5x \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 - 312.5x + 625 = 0 \Rightarrow x = 50, x = 2\frac{1}{12}, x > 4 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow 1.5x - 5 = 70$

מהירות מכונית ב': 50 קמ"ש , מהירות מכונית א': 70 קמ"ש

3)

	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
מכונית ב'	50	$\frac{130}{50} = 2\frac{3}{5}$	3x-20 =130

מכונית ב' נסעה מ- B ל- A במשך $2\frac{3}{5}$ שעות , כלומר במשך שעתיים ו- 36 דקות

($\frac{3}{5} \cdot 60 = 36$) לכן היא הגיעה **בשעה** $\mathbf{10^{36}}$.

פתרון שאלה מס' 2

א. 1) משוואת הישר AB : $y-5=1(x-11)\Rightarrow y=x-6$. נציב $y=0$ ונקבל:

$0=x-6\Rightarrow x=6\Rightarrow \mathbf{A(6;0)}$

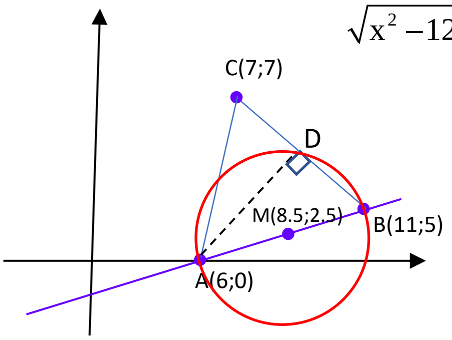
2) $AB=\sqrt{(11-6)^2+(5-0)^2}=\sqrt{\mathbf{50}}$.

ב. נסמן : $C(x;7)$ ונקבל: $AC=\sqrt{(x-6)^2+(7-0)^2}=\sqrt{x^2-12x+36+49}=\sqrt{x^2-12x+85}$

נתון: $AC=AB$ לכן : $\Rightarrow \sqrt{x^2-12x+85}=\sqrt{50}\Rightarrow x^2-12x+85=50\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-12x+35=0\Rightarrow x=7, x=5$

נתון $x>6$ לכן $x=7$. מקבלים: $\mathbf{C(7;7)}$



ג. 1) הנקודה D היא אמצע הבסיס BC במשולש שווה-שוקיים ABC , לכן AD הוא גם גובה לבסיס : $AD\perp BC$.

משולש ABD ישר זווית ($\measuredangle ADB=90^\circ$) לכן מרכז המעגל החוסם את המשולש הוא אמצע היתר AB . נסמן את מרכז המעגל ב- M ונקבל:

$x_M=\frac{6+11}{2}=8.5 \ , y_M=\frac{5+0}{2}=2.5\Rightarrow M(8.5;2.5)$

חישוב אורך רדיוס המעגל: $R=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{50}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

משוואת המעגל: $\mathbf{(x-8.5)^2+(y-2.5)^2=12.5}$.

2) הנקודה D : $x_D=\frac{7+11}{2}=\frac{18}{2}=9 \ , \ y_D=\frac{7+5}{2}=\frac{12}{2}=6\Rightarrow D(9;6)$.

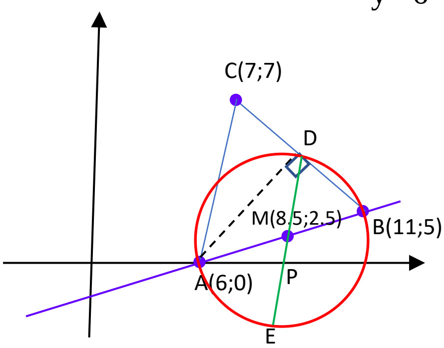
המשיק בנקודה D מאונך לרדיוס MD. שיפוע MD : $m_{MD}=\frac{6-2.5}{9-8.5}=\frac{3.5}{0.5}=7 \Leftarrow$

שיפוע המשיק הוא $-\frac{1}{7}$. משוואת המשיק: $y-6=-\frac{1}{7}(x-9)\Rightarrow \mathbf{y=-\frac{1}{7}x+\frac{51}{7}}$

ג. משוואת הקוטר DE : $y-6=7(x-9)\Rightarrow y=7x-57$

שיעור ה- x של הנקודה P : $y=0 \Rightarrow 0=7x-57 \Rightarrow x=8\frac{1}{7} \Leftarrow$

$\Rightarrow AP=8\frac{1}{7}-6=\mathbf{2\frac{1}{7}}$



פתרון שאלה מס' 3

א. נסמן : A – קבוצת הבנות , $\bar{A}$ - קבוצת הבנים

B – ארוחות צמחוניות , $\bar{B}$ - ארוחות בשריות.

נתון: $P(B/A) = 0.6$, $P(A) = \frac{11}{9}\cdot P(\bar{A})$, $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 4\cdot P(\bar{A}\cap B)$.

נסמן: $P(\bar{A}) = x \Rightarrow P(A) = 1 - x$, $P(\bar{A}\cap B) = y \Rightarrow P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 4y$.

מקבלים: $1 - x = \frac{11}{9}\cdot x \Rightarrow 9 - 9x = 11x \Rightarrow 20x = 9 \Rightarrow x = 0.45 \Rightarrow$

$$p(\bar{A}) = 0.45 \Rightarrow p(A) = 0.55$$

$$P(B/A) = 0.6 \Rightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = 0.6 \Rightarrow \frac{P(B\cap A)}{0.55} = 0.6 \Rightarrow P(B\cap A) = 0.33$$

	A	$\bar{A}$	
B	0.33	y	
$\bar{B}$	0.22	4y	
	0.55	0.45	1

מקבלים: $4y = 0.36 \Leftarrow y = 0.09 \Leftarrow 5y = 0.45$. נשלים את הטבלה:

	A	$\bar{A}$	
B	0.33	0.09	0.42
$\bar{B}$	0.22	0.36	0.58
	0.55	0.45	1

1) $\mathbf{P(B) = 0.42}$

2) $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.33}{0.42} = \mathbf{\frac{11}{14} = 0.786}$

ב. 1) $P(B) = 0.42 \Rightarrow \frac{N(B)}{400} = 0.42 \Rightarrow N(B) = 0.42\cdot 400 = \mathbf{168}$

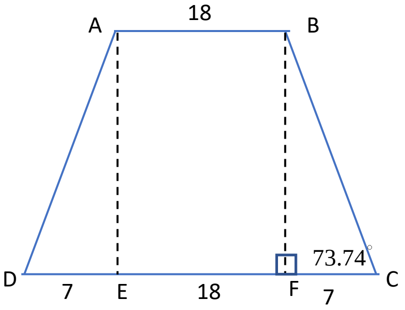
3) 2) חישוב: $\frac{168}{400}\cdot\frac{167}{399} = \mathbf{\frac{167}{950} = 0.1758}$

פתרון שאלה מס' 4

	טענה	נימוק
א. 1)	$AF \parallel BD$	נתון
	$\sphericalangle AFE = \sphericalangle EBD$	ישרים מקבילים יוצרים זוויות מתחלפות שוות
	$\sphericalangle AEF = \sphericalangle BED$	זוויות קודקודיות שוות זו לזו
	$\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta DEB$	משפט דמיון ז.ז.
	$\Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{EF}{EB} = \frac{AF}{DB}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים
	$\Rightarrow \frac{EF}{EB} = \frac{AF}{DB} \Rightarrow AF \cdot EB = FE \cdot BD$	מ.ש.ל.
2)	נסמן $FE = x$ ונקבל $EB = 1.5x$	סימון
	$\Rightarrow \sqrt{10} \cdot 1.5x = x \cdot BD \Rightarrow \mathbf{BD = \frac{3\sqrt{10}}{2}}$	חישוב
ב. 1)	$\sphericalangle ABF = \sphericalangle EDB$	זווית בין משיק למיתר
	$\sphericalangle AFB = \sphericalangle EBD$	ישרים מקבילים יוצרים זוויות מתחלפות שוות
	$\Rightarrow \Delta ABF \sim \Delta EDB$	משפט דמיון ז.ז.
2)	$\frac{AB}{ED} = \frac{BF}{DB} = \frac{AF}{EB}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים
	$\Rightarrow \frac{BF}{DB} = \frac{AF}{EB} \Rightarrow \frac{x + 1.5x}{1.5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{1.5x}$	הצבה
	$\Rightarrow \frac{2.5x}{1.5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{1.5x} \Rightarrow 2.5x^2 = 10 \Rightarrow$ $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow BF = 2.5 \cdot 2 = \mathbf{5}$	חישוב
ג.	$\Delta AEF \sim \Delta DEB$	הוכח
	$\frac{EF}{EB} = \frac{x}{1.5x} = \frac{2}{3}$	יחס הדמיון
	$\Rightarrow \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta DEB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
	$\Rightarrow \frac{3}{S_{\Delta DEB}} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\Delta DEB} = 6.75$	
	$\Delta ABF \sim \Delta EDB$	הוכח
	$\frac{BF}{DB} = \frac{5}{1.5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$	יחס הדמיון

	$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta EDB}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
	$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABF}}{6.75} = \frac{10}{9} \Rightarrow S_{\Delta ABF} = \mathbf{7.5}$	
ד.	$\frac{AB}{ED} = \frac{BF}{DB}$	הוכח
	$\Rightarrow \frac{AB}{6.4} = \frac{5}{1.5\sqrt{10}} \Rightarrow AB = \frac{32\sqrt{10}}{15} \approx 6.75$	חישוב
	$AC = AB$	שני משיקים היוצאים מאותה נקודה למעגל שווים זה לזה
	$\Rightarrow \mathbf{AC \approx 6.75}$	

פתרון שאלה מס' 5



א. 1) נעביר גבהים AE ו- BF מנקודות A ו- B לבסיס CD .

מתקבל מלבן ABFE ושני משולשים ישרי זווית

חופפים BCF ו- ADE. לכן: $AB = EF = 18$,

$DE = CF = \frac{32 - 18}{2} = 7$. במשולש BCF מקבלים:

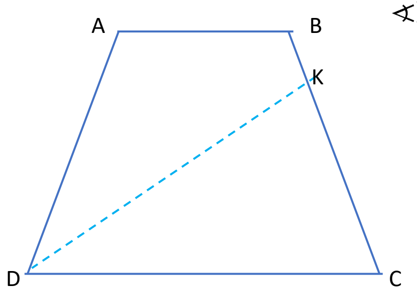
$\tan(73.74^\circ) = \frac{BF}{7} \Rightarrow BF = \mathbf{24}$

2) $S_{ABCD} = \frac{(AB+CD)\cdot BF}{2} = \frac{(18+32)\cdot 24}{2} = \mathbf{600}$

ב. 1) $\sphericalangle BCD = 73.74^\circ \Rightarrow \sphericalangle ADC = 73.74^\circ \Rightarrow \sphericalangle KDC = \frac{73.74^\circ}{2} = 36.87^\circ$

במשולש CDK : $CD = 32$,

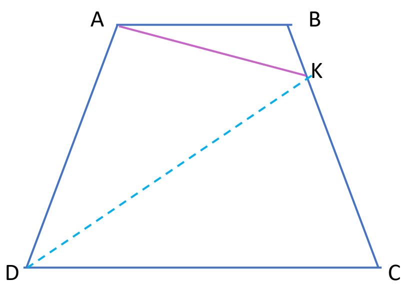
$\sphericalangle KDC = 36.87^\circ, \sphericalangle KCD = 73.74^\circ \Rightarrow \sphericalangle DKC = 69.39^\circ$



מקבלים: $\frac{32}{\sin 69.39^\circ} = \frac{DK}{\sin 73.74^\circ} \Rightarrow$

$DK = \frac{32\cdot \sin 73.74^\circ}{\sin 69.39^\circ} = \mathbf{32.82}$

2) במשולש CDK :



$\frac{32}{\sin 69.39^\circ} = \frac{KC}{\sin 36.87^\circ} \Rightarrow$

$KC = \frac{32\cdot \sin 36.87^\circ}{\sin 69.39^\circ} = 20.51 \Rightarrow$

$BK = 25 - 20.51 = 4.49$.

במשולש ABK :

$AB = 18$, $BK = 4.49$, $\sphericalangle ABK = 106.26^\circ$. מקבלים, בעזרת משפט הקוסינוסים :

$$AK^2 = 18^2 + 4.49^2 - 2 \cdot 18 \cdot 4.49 \cdot \cos 106.26^\circ = 389.42 \Rightarrow$$

$$AK = \mathbf{19.73}$$

פתרון שאלה מס' 6

א. על פי הגרף מקבלים: תחום **החיוביות של $f'(x)$ הוא:** $\mathbf{-5 < x < 7}$

תחומי השליליות הם: $\mathbf{x < -5 \,,\, x > 7}$

ב. 1) נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x < 7$ או $x > 7$, כלומר , הפונקציה איננה מוגדרת

עבור $x = 7$. לכן , בפונקציה $f(x) = \dfrac{-x^2+15x-50}{(x+a)^2}$ מתקיים: $(7+a)^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{a = -7}$

2) מקבלים: $f(x) = \dfrac{-x^2+15x-50}{(x-7)^2}$. האסימפטוטה לגרף הפונקציה המאונכת לציר ה- x היא

$\mathbf{x = 7}$ והאסימפטוטה לגרף הפונקציה המאונכת לציר ה- y היא $\mathbf{y = -1}$

3) על פי תחומי החיוביות והשליליות של הנגזרת $f'(x)$:

x	x <	-5	< x <	7	< x
f '(x)	-	0	+		-
f(x)	↘	min	↗		↘

תחום העלייה : $\mathbf{-5 < x < 7}$, **תחום הירידה:** $\mathbf{x < -5 \,,\, x > 7}$

4) בנקודה שבה $x = -5$ יש לפונקציה נקודת מינימום.

$f(-5) = \dfrac{-(-5)^2+15(-5)-50}{(-5-7)^2} = \dfrac{-150}{144} = -1\dfrac{1}{24}$ לכן $\mathbf{(-5;-1\frac{1}{24})}$ **נקודת מינימום.**

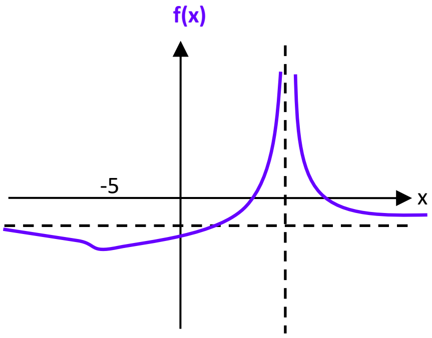
5) נקודת חיתוך עם ציר y : $f(0) = \dfrac{-50}{49} = -1\dfrac{1}{49} \Rightarrow \mathbf{(0;-1\frac{1}{49})}$

נקודות חיתוך עם ציר x :

$$\frac{-x^2+15x-50}{(x-7)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+15x-50 = 0 \Rightarrow x = 5 \,,\, x = 10$$

מתקבלות הנקודות $\mathbf{(5;0)\,,\,(10;0)}$

6)

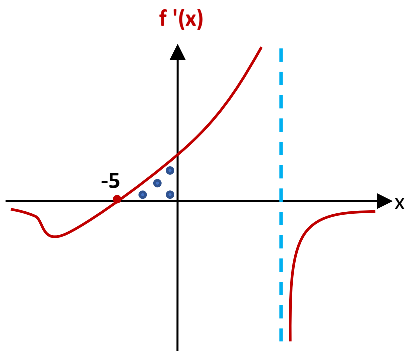


7) הערך המינימלי של הפונקציה הוא $-1\dfrac{1}{24}$,

לכן , **אין פתרון** למשוואה $f(x) = -2$.

ג. $S = \displaystyle\int_{-5}^{0} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_{-5}^{0} = f(0) - f(-5) =$

$$-1\frac{1}{49} - (-1\frac{1}{24}) = \frac{25}{1176} = \mathbf{0.0213}$$



פתרון שאלה מס' 7

א. הישר $y = -4x - 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$, לכן מתקיים: ערך הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא $y = -4\cdot1 - 3 = -7$, כלומר $f(1) = -7$. ידוע גם ששיפוע המשיק הוא -4 לכן, ערך הנגזרת בנקודה שבה $x = 1$ הוא -4, כלומר $f'(1) = -4$.

מקבלים: $-7 = a\cdot1^4 - 8\cdot1 + b \Rightarrow -7 = a - 8 + b \Rightarrow a + b = 1$.

$$f'(x) = 4ax^3 - 8 \Rightarrow -4 = 4a\cdot1^3 - 8 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow \mathbf{a = 1} \Rightarrow \mathbf{b = 0}$$

ב. $f(x) = x^4 - 8x$

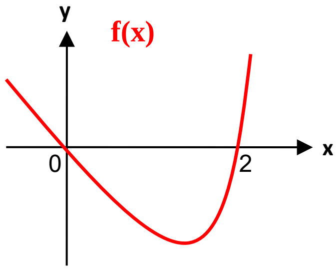
1) $f(0) = 0\ ,\ 0 = x^4 - 8x \Rightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

מתקבלות הנקודות: $\mathbf{(0;0)\ ,\ (2;0)}$

2) $f(x) = x^4 - 8x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 8 = 0 \Rightarrow 4x^3 = 8 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} = 1.26$

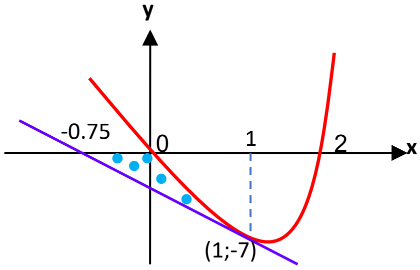
$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(1.26) > 0 \Rightarrow$

בנקודה שבה $\mathbf{x = 1.26}$ **יש לפונקציה נקודת מינימום** (3



ג. נחשב את השטח המבוקש, המוגבל בין 3 פונקציות, על-ידי חיסור שני שטחים: I. השטח המוגבל בין הישר $y = -4x - 3$, ציר ה- x והישר $x = 1$

II.השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 1$ ו- $x = 0$.

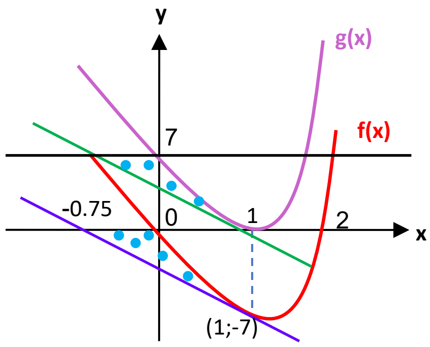


חישוב שטח המשולש: שיעור ה- x של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x: $0 = -4x - 3 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -0.75$

מקבלים: $S_I = \frac{1}{2}\cdot(1 + 0.75)\cdot7 = 6\frac{1}{8}$

$$S_{II} = \int_0^1 \left[0 - (x^4 - 8x)dx\right] = \int_0^1 (-x^4 + 8x)dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^1 = 3\frac{3}{4}$$

$$S = S_I - S_2 = 6\frac{1}{8} - 3\frac{3}{4} = \mathbf{2.325}$$



ד. הפונקציה $g(x)$ היא הזזה אנכית של הפונקציה $f(x)$ 7 יחידות כלפי מעלה, לכן, גם המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$ יעלה 7 יחידות כלפי מעלה.

הישר $y = 7$ הנו הזזה של ציר ה- x 7 יחידות כלפי מעלה.

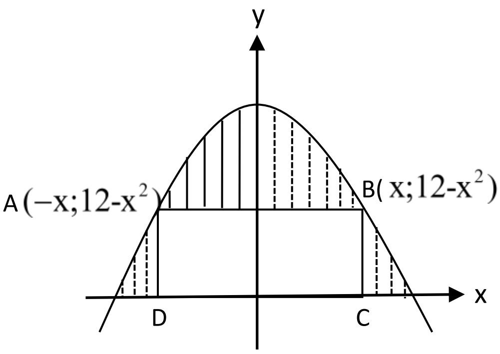
מסקנה: השטח המבוקש זהה לשטח שחישבנו בסעיף ג' : **2.325**

פתרון שאלה מס' 8

1) $0 = 12 - x^2 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} \Rightarrow \mathbf{(-\sqrt{12};0),(\sqrt{12};0)}$

2) $S = \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \left(12 - x^2\right)dx = \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} =$

$\left(24\sqrt{3} - 8\sqrt{3}\right) - \left(-24\sqrt{3} + 8\sqrt{3}\right) = \mathbf{32\sqrt{3} = 55.426}$



ב. 1) שיעורי הנקודה B הם : $\mathbf{B(x;12 - x^2)}$.

ציר ה- y חוצה את הצלע AB לכן , שיעורי הנקודה A

הם $\mathbf{A(-x;12 - x^2)}$. מקבלים : $\mathbf{C(x;0)\ ,\ D(-x;0)}$

2) $AB = 2x\ ,\ AD = 12 - x^2 \Rightarrow S_{ABCD} = 2x \cdot (12 - x^2)$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 24x - 2x^3 \Rightarrow$

השטח המקווקו : $S(x) = 32\sqrt{3} - (24x - 2x^3) \Rightarrow \mathbf{S(x) = 32\sqrt{3} - 24x + 2x^3}$

3) $S(x) = 32\sqrt{3} - 24x + 2x^3 \Rightarrow S'(x) = -24 + 6x^2 \Rightarrow 6x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

הנקודה B נמצאת ברביע הראשון , לכן $x > 0$ ומקבלים $x = 2$.

זיהוי הנקודה בעזרת הנגזרת השנייה : $S''(x) = 12x \Rightarrow S''(2) = 24 > 0 \Rightarrow$

$x = 2$ נקודת מינימום .

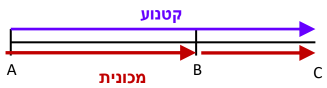
שיעורי הנקודה B : $x = 2 \Rightarrow y = 12 - 2^2 = 8 \Rightarrow \mathbf{B(2;8)}$

4) $AB = 2x = 4\ ;\ AD = y = 8 \Rightarrow \mathbf{AB = DC = 4\ ;\ AD = BC = 8}$

מבחן מתכונת מס' 2

פתרון שאלה מס' 1

א.

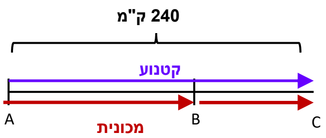


	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
קטנוע	60	x	$60x$
מכונית-עצירה	0	$\frac{80}{60}=\frac{4}{3}$	0
מכונית- נסיעה	90	$x-\frac{4}{3}$	$90(x-\frac{4}{3})$

מקבלים: $60x = 90(x-\frac{4}{3}) \Rightarrow 6x = 9x - 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$

המכונית חלפה על פני הקטנוע כעבור 4 שעות , כלומר **בשעה 13:00**

ב. 1)



	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
קטנוע	v	$\frac{240}{v}$	240
מכונית-עצירה	0	$\frac{36}{60}=\frac{3}{5}=0.6$	0
מכונית- נסיעה	$v+20$	$\frac{240}{v+20}$	240

מקבלים: $\frac{240}{v} = 0.6 + \frac{240}{v+20} \Leftarrow$

$$240(v+20) = 0.6v(v+20) + 240v \Rightarrow 240v + 4800 = 0.6v^2 + 12v + 240v \Rightarrow$$

$$0.6v^2 + 12v - 4800 = 0 \Rightarrow v = 80, v = -100, v > 0 \Rightarrow v = 80 \Rightarrow$$

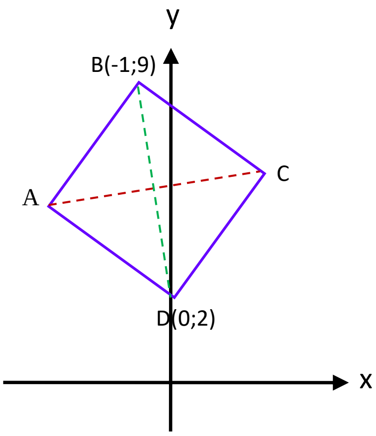
מהירות הנסיעה של הקטנוע: 80 קמ"ש , מהירות הנסיעה של המכונית: 100 קמ"ש

2) זמן הנסיעה ביום זה הוא $3 = \frac{240}{80} = \frac{240}{v}$ לכן , המכונית חלפה על פני הקטנוע **בשעה 12:00**.

פתרון שאלה מס' 2

א. 1) אלכסוני הריבוע מאונכים זה לזה , לכן , אם שיפוע האלכסון AC הוא $\frac{1}{7}$, אז שיפוע האלכסון BD הוא -7 . מקבלים: $y - 9 = -7(x + 1) \Rightarrow y = -7x + 2$.

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הישר BD עם ציר ה- y לכן מקבלים: $y = 2$, $x = 0$. לכן:
D(0;2)



2) אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה , לכן נקודת מפגש האלכסונים היא אמצע האלכסון BD. מקבלים:

$$x = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2} ; y = \frac{9+2}{2} = 5\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{(-\frac{1}{2};5\frac{1}{2})}$$

3) על פי השיפוע $\frac{1}{7}$ ונקודת החיתוך של האלכסונים:

$$y - 5\frac{1}{2} = \frac{1}{7}(x + \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbf{y = \frac{1}{7}x + \frac{39}{7}}$$

ב. 1) $BD = \sqrt{(-1-0)^2 + (9-2)^2} = \sqrt{50} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

2) נסמן את נקודת מפגש האלכסונים ב- M . מקבלים: $AM = MC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. נסמן את שיעורי הנקודה A (או C) ב- (x;y) ונקבל:

$$\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y-5\frac{1}{2})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + (y-5\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$$ וגם

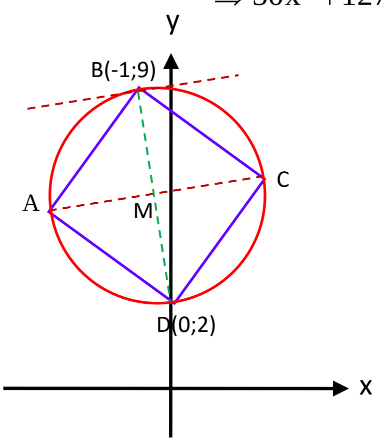
$y = \frac{1}{7}x + \frac{39}{7} = \frac{x+39}{7}$. נקבל: $x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 11y + \frac{121}{4} = \frac{25}{2}$ ⇐ נציב ונקבל:

$$x^2 + x + \frac{x^2 + 78x + 1521}{49} - \frac{11x + 429}{7} + 18 = 0$$

$$\Rightarrow 49x^2 + 49x + x^2 + 78x + 1521 - 7(11x + 429) + 882 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50x^2 + 127x + 1521 - 77x - 3003 + 882 = 0 \Rightarrow 50x^2 + 50x - 600 = 0 \Rightarrow$$

$$50x^2 + 50x - 600 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = -4, x = 3$$



עבור $x = -4$ מקבלים $y = \frac{-4+39}{7} = 5 \Rightarrow \mathbf{A(-4;5)}$

עבור $x = 3$ מקבלים $y = \frac{3+39}{7} = 6 \Rightarrow \mathbf{C(3;6)}$

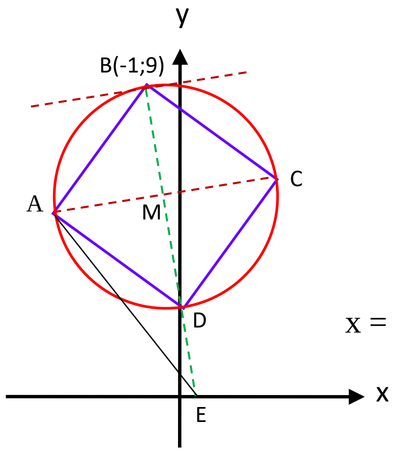
ג. 1) מרכז המעגל החוסם את הריבוע נמצא בנקודת החיתוך

של אלכסוני הריבוע. אורך הרדיוס שווה למחצית אורך האלכסון.

מקבלים: $\mathbf{(x-\frac{1}{2})^2+(y-5\frac{1}{2})^2=12\frac{1}{2}}$

2) משוואת ישר ששיפועו $\frac{1}{7}$ והעובר בנקודה (-1;9):

$$y-9=\frac{1}{7}(x+1)\Rightarrow \mathbf{y=\frac{1}{7}x+9\frac{1}{7}}$$



3) **כן**: הישר מאונך לרדיוס MB בנקודה B לכן הוא משיק למעגל.

ד. הנקודה E נמצאת על האלכסון BD ועל ציר ה- x:

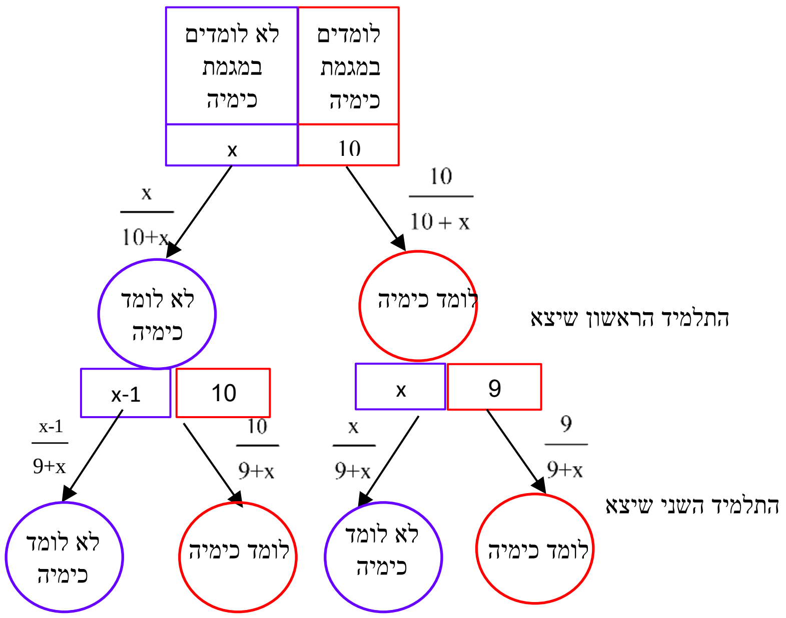
$$y=0\ ,\ y=-7x+2\Rightarrow 0=-7x+2\Rightarrow 7x=2\Rightarrow$$

$$x=\frac{2}{7}\Rightarrow E(\frac{2}{7};0)\Rightarrow ME=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{7}\right)^2+\left(5\frac{1}{2}-0\right)^2}=\sqrt{30\frac{85}{98}}$$

$$AM=\frac{5\sqrt{2}}{2}, AM\perp ME\Rightarrow S_{\Delta AME}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{30\frac{85}{98}}=\mathbf{9.82}$$

<u>פתרון שאלה מס' 3</u>

א. נסמן ב- x את מספר תלמידי הכיתה שאינם לומדים במגמת כימיה. נקבל:

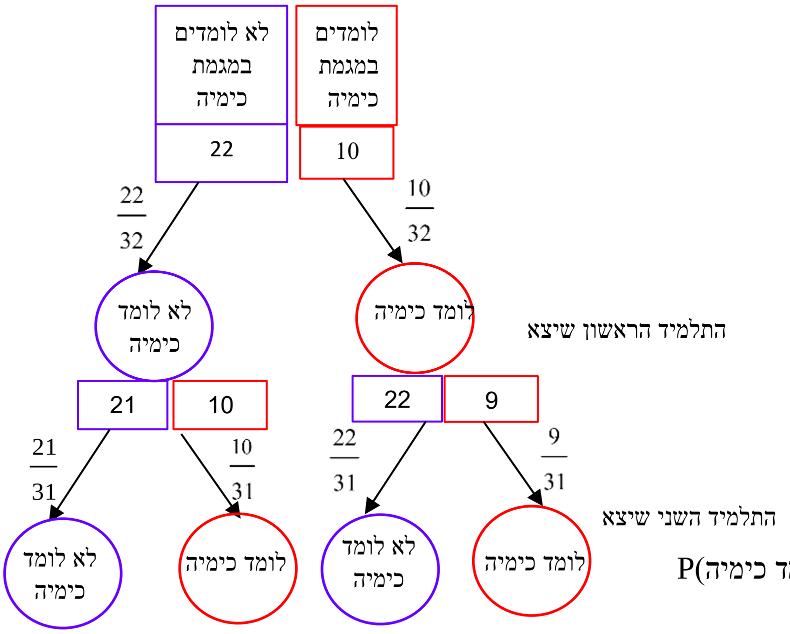


מקבלים:

$$\frac{10}{10+x}\cdot\frac{9}{9+x}=\frac{45}{496}\Rightarrow\frac{90}{x^2+19x+90}=\frac{45}{496}\Rightarrow 45(x^2+19x+90)=90\cdot 496\Rightarrow$$

$$x^2+19x+90=992\Rightarrow x^2+19x-902=0\Rightarrow x=22\ ,\ x=-41$$

מספר תלמידי הכיתה הוא $x>0\Rightarrow x=22\Rightarrow 10+22=\mathbf{32}$



ב. מקבלים: $\frac{10}{32}\cdot\frac{22}{31}+\frac{22}{32}\cdot\frac{10}{31}=\mathbf{\frac{55}{124}}$

ג. 1) לפחות תלמיד אחד לומד במגמת כימיה הנו האירוע המשלים למקרה בו אף אחד משני התלמידים שיצאו אינו לומד במגמת כימיה.

מקבלים:

$$1-\frac{22}{32}\cdot\frac{21}{31}=\mathbf{\frac{265}{496}}$$

2) צריך לחשב הסתברות מותנית :

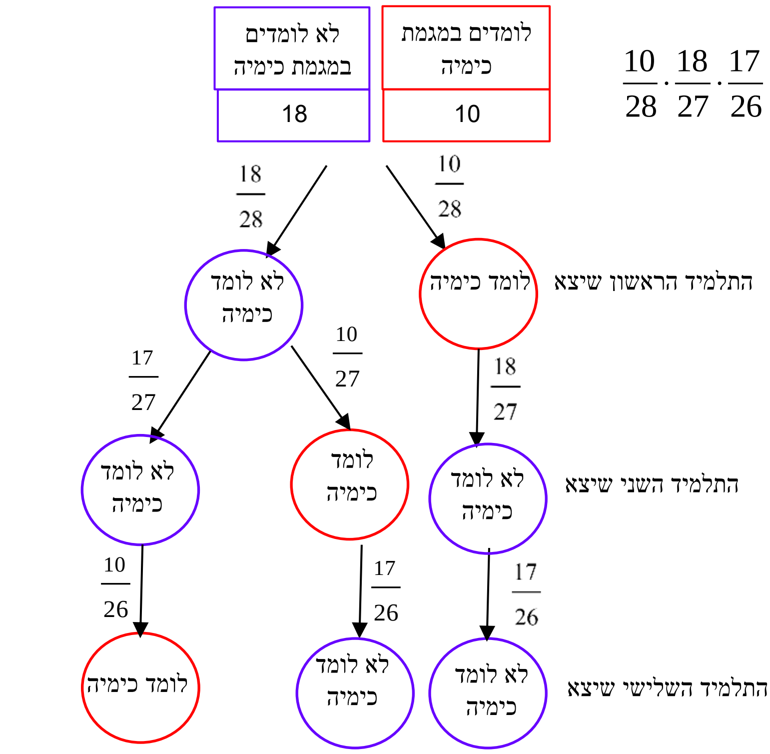
P(לפחות תלמיד אחד לומד כימיה/ רק אחד לומד כימיה)

חישוב : $P=\frac{55}{124}:\frac{265}{496}=\mathbf{\frac{44}{53}}$

ג. אם בדיוק תלמיד אחד מבין השלושה לומד במגמת כימיה , האפשרויות הן:

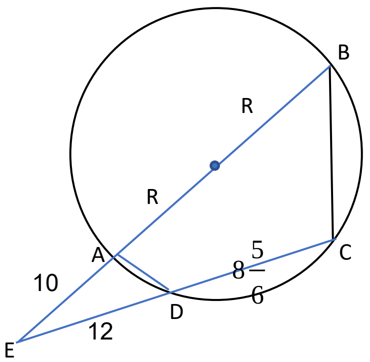
מקבלים:

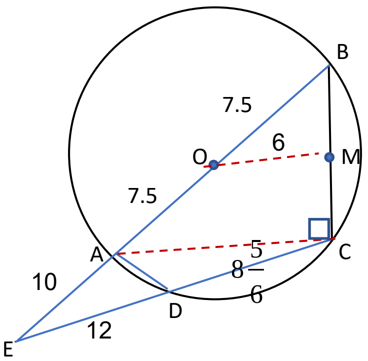
$$\frac{10}{28}\cdot\frac{18}{27}\cdot\frac{17}{26}+\frac{18}{28}\cdot\frac{10}{27}\cdot\frac{17}{26}+\frac{18}{28}\cdot\frac{17}{27}\cdot\frac{10}{26}=3\cdot\frac{85}{546}=\mathbf{\frac{85}{182}}$$



פתרון שאלה מס' 4

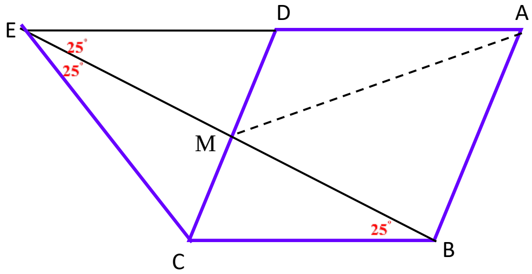
	טענה	נימוק
א.	נסמן: $\sphericalangle B = \beta$	סימון
	$\Rightarrow \sphericalangle ADC = 180^\circ - \beta$	במרובע חסום במעגל סכום הזוויות הנגדיות הוא 180°
	$\Rightarrow \sphericalangle ADE = \beta$	סכומן של זוויות צמודות הוא 180°
	$\Rightarrow \sphericalangle ADE = \sphericalangle B$	כלל המעבר
	$\sphericalangle E = \sphericalangle E$	זווית משותפת
	$\Rightarrow \Delta EDA \sim \Delta EBC$	
ב.	נסמן את רדיוס המעגל ב- R	סימון
	$\Rightarrow AB = 2R$	נתון: AB קוטר
	$\frac{ED}{EB} = \frac{DA}{BC} = \frac{EA}{EC}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים
	$\frac{12}{10+2R} = \frac{10}{20\frac{5}{6}}$	הצבה
	$\Rightarrow 12 \cdot 20\frac{5}{6} = 10(10+2R)$ $\Rightarrow 250 = 100 + 20R \Rightarrow$ $\Rightarrow 150 = 20R \Rightarrow \mathbf{R = 7.5}$	חישוב
ג.	$S_{\Delta AED} = 20.736$	נתון
	$\frac{S_{\Delta EDA}}{S_{\Delta EBC}} = \left(\frac{ED}{EB}\right)^2 \Rightarrow$	יחס השטחים של משולשים דומים
	$\Rightarrow \frac{20.736}{S_{\Delta EBC}} = \left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{144}{625}$ $\Rightarrow S_{\Delta EBC} = 90 \Rightarrow$ $\mathbf{S_{ABCD}} = 90 - 20.736 = \mathbf{69.264}$	
ד.	$\sphericalangle ACB = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה





	$MC = BM$	נתון
	$AO = BO$	רדיוסים שווים במעגל
	$\Leftarrow$ OM קטע אמצעים במשולש ABC	קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש הוא קטע אמצעים במשולש
	$\Rightarrow AC=12$	קטע האמצעים שווה למחצית הצלע השלישית
	$\Rightarrow BC^2 + AC^2 = AB^2$	משפט פיתגורס במשולש ישר זווית ABC
	$\Rightarrow BC^2 + 12^2 = 15^2$ $\Rightarrow BC = 9$	חישוב
	$\Rightarrow \mathbf{S_{\Delta ABC}} = \frac{12\cdot 9}{2} = \mathbf{54}$	חישוב
	$\Rightarrow S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABCD} - S_{\Delta ABC} =$ $= 69.264 - 54 = 15.264$ $\mathbf{S_{\Delta ADC} = 15.264}$	חישוב

<u>פתרון שאלה מס' 5</u>



א. 1) $\sphericalangle DEB = 25^\circ$, EB חוצה זווית $\sphericalangle DEC$

לכן $\sphericalangle CEB = 25^\circ$. $ED \parallel CB$ לכן :

$\sphericalangle DEB = \sphericalangle EBC = 25^\circ$ (זוויות מתחלפות שוות)

מקבלים: $\mathbf{\sphericalangle CEB = \sphericalangle CBE = 25^\circ} \Leftarrow$

$\Leftarrow \mathbf{\sphericalangle ECB} = 180^\circ - 2\cdot 25^\circ = \mathbf{130^\circ}$

2) $CE = CB$ (מול זוויות שוות במשולש נמצאות צלעות שוות) $\Leftarrow$ $CB = CD$ (צלעות המעוין

שוות זו לזו) $\Leftarrow CE = CD \Leftarrow$

$\mathbf{\sphericalangle CED = \sphericalangle EDC = 50^\circ}$ (מול צלעות שוות במשולש ECD

נמצאות זוויות שוות) $\Leftarrow \mathbf{\sphericalangle ECD} = 180^\circ - 2\cdot 50^\circ = \mathbf{80^\circ}$.

3) $\sphericalangle EDC = \sphericalangle DCB = 50^\circ$ (זוויות מתחלפות שוות). מקבלים:

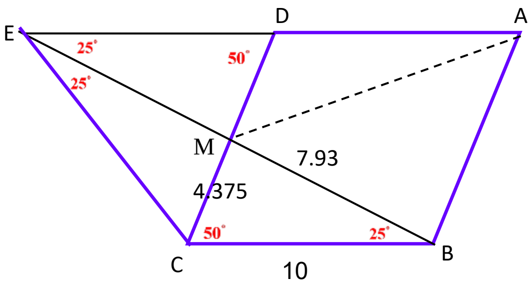
$\mathbf{\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB = 50^\circ} \Rightarrow \mathbf{\sphericalangle CDA = \sphericalangle ABC = 130^\circ}$

4) במשולש MBC :

$\Leftarrow \sphericalangle CMB = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

$$\frac{7.93}{\sin 50^\circ} = \frac{BC}{\sin 105^\circ} \Rightarrow BC = \mathbf{10}$$

ב. 1) במשולש ECB :



$$\mathbf{EB = 18.126} \Leftarrow \frac{10}{\sin 25^\circ} = \frac{EB}{\sin 130^\circ}$$

במשולש ECD :

$\Leftarrow \sphericalangle ECD = 80^\circ$, CD = 10

$$\mathbf{ED = 12.856} \Leftarrow \frac{10}{\sin 50^\circ} = \frac{ED}{\sin 80^\circ}$$

2) במשולש AEM :

$\sphericalangle AEM = 25^\circ$, $EM = 18.126 - 7.93 = 10.196$, $EA = 12.856 + 10 = 22.856$

מקבלים : $AM^2 = 22.856^2 + 10.196^2 - 2 \cdot 22.856 \cdot 10.196 \cdot \cos 25^\circ = 203.94$

$\Rightarrow \mathbf{AM = 14.28}$

3) במשולש AEM :

$$\frac{14.28}{\sin 25^\circ} = 2R \Rightarrow \mathbf{R = 16.89}$$

__פתרון שאלה מס' 6__

א. על פי הנתונים בגרף הפונקציה : $f'(4) = 0$, $f'(x)$ שלילית בתחום בו $x < 4$ וחיובית בתחום בו $x > 4$, לכן: בנקודה שבה $\mathbf{x = 4}$ יש לפונקציה $f(x)$ **נקודת מינימום.**

ב. 1) ידוע: $f'(4) = 0$, לכן:

$$f'(x) = \frac{0 - 4\left[1 \cdot \sqrt{a-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{a-x}}\right]}{\left(x\sqrt{a-x}\right)^2} = \frac{-4\sqrt{a-x} + \frac{2x}{\sqrt{a-x}}}{\left(x\sqrt{a-x}\right)^2} =$$

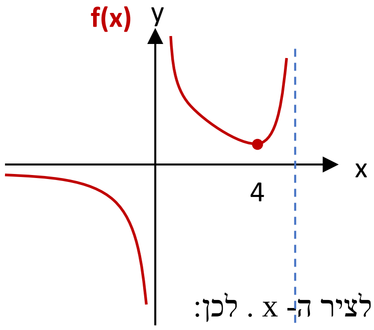
$$= \frac{-4(a-x) + 2x}{x^2\left(\sqrt{a-x}\right)^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4a + 6x}{x^2\left(\sqrt{a-x}\right)^3} \Rightarrow f'(4) = 0 \Rightarrow -4a + 6 \cdot 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{a = 6}$$

ג. 1) $f(x) = \frac{4}{x\sqrt{6-x}} \Leftarrow$ תחום ההגדרה הוא : $x\sqrt{6-x} \neq 0$ וגם $6 - x \geq 0$.

מקבלים : $x \neq 0$, $x \neq 6$, $x \leq 6$. מקבלים : $\mathbf{x < 0 , 0 < x < 6}$

2) בעזרת גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$:

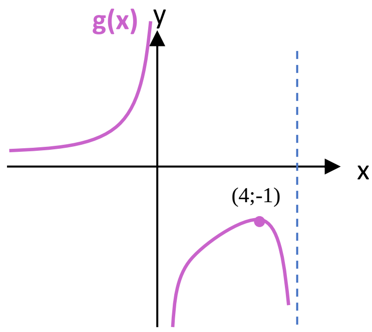
x	x <	0	0 < x < 4	4	4 < x <	6
f '(x)	-		-	0	+	
f(x)	↘		↘	min	↗	



(3 **תחום העלייה: $4 < x < 6$, תחום הירידה : $x < 0 , 0 < x < 4$**

נקודת המינימום: $f(4) = \frac{4}{4\sqrt{6-4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathbf{(4;\frac{\sqrt{2}}{2})}$

ד. הפונקציה $g(x) = -\sqrt{2}\cdot f(x)$ היא מתיחה ושיקוף של הפונקציה f(x) ביחס לציר ה- x . לכן:



1) נקודת הקיצון של g(x) : **(4;-1) נקודת מקסימום** (2

3) עבור $\mathbf{-1 < k \le 0}$ הישר $y = k$ לא יחתוך את גרף הפונקציה g(x) , לכן אין פתרון למשוואה $g(x) = k$.

<u>פתרון שאלה מס' 7</u>

א. על פי הנתון , הישרים $x = 1$ ו- $y = 1$ הם אסימפטוטות לגרף הפונקציה. לכן:

$1^2 + b = 0$ וגם $\frac{ax^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \mathbf{a = 1 , b = -1}$.

ב. 1) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1}$. תחום ההגדרה: $x^2 \ne 1 \Rightarrow x \ne \pm 1 \Rightarrow$ הפונקציה מוגדרת בתחומים:

$\mathbf{x < -1 , -1 < x < 1 , x > 1}$

2) $f'(x) = \frac{(2x-6)\cdot(x^2-1) - 2x(x^2-6x+9)}{(x^2-1)^2} =$

$= \frac{2x^3 - 2x - 6x^2 + 6 - 2x^3 + 12x^2 - 18x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^2 - 20x + 6}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 20x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 , \; x = \frac{1}{3}$

נמצא את שיעורי ה- y של הנקודות: $f(3) = 0 , f(\frac{1}{3}) = -8$

x	x < - 1	-1	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	1<x<3	3	x>3
y'	+		+	0	-		-	0	+
y	↗		↗	-8	↘		↘	0	↗

$f'(-2) > 0 , f'(0) > 0 , f'(0.5) < 0 , f'(4) > 0$

מסקנות: $(\frac{1}{3};-8)$ **נקודת מקסימום** , $(3;0)$ **נקודת מינימום**

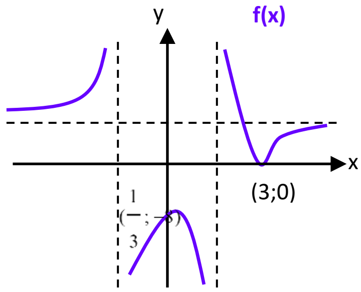
3) **תחומי העלייה:** $x > 3$, $x < -1,\ -1 < x < \frac{1}{3}$

תחומי ירידה: $\frac{1}{3} < x < 1, 1 < x < 3$

4) אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x : $x \to 1, y \to \pm\infty$, $x \to -1, y \to \pm\infty$

$x = 1$ ו- $x = -1$ אסימפטוטות מקבילות לציר ה- y.

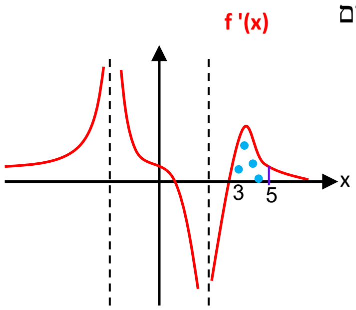
אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x : $y = 1$ (5



ג. על פי תחומי החיוביות והשלילית , כפי שנרשמו

בטבלה בסעיף ב-2) , הגרף היחיד שמתאים

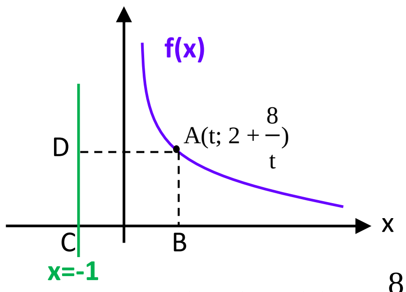
הוא **גרף (2)** .



ד. חישוב : $S = \int_3^5 f'(x)dx = [f(x)]_3^5 =$

$= f(5) - f(3) = \frac{1}{6} - 0 = \mathbf{\frac{1}{6}}$

פתרון שאלה מס' 8



א. 1) נסמן: $A(t;\ 2+\frac{8}{t})$ ונקבל:

$AD = t + 1$, $AB = 2 + \frac{8}{t}$. לכן, שטח המלבן

ABCD הוא $S(t) = (t+1)(2+\frac{8}{t}) = 2t+8+2+\frac{8}{t} \Rightarrow S(t) = 2t+10+\frac{8}{t}$

נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה:

$$S'(t) = 2-\frac{8}{t^2} = \frac{2t^2-8}{t^2} = 0 \Rightarrow 2t^2-8=0 \Rightarrow 2t^2=8 \Rightarrow t^2=4$$

$t > 0$ לכן : $t = 2$. זיהוי הנקודה :

x	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
S'(t)		-	0	+
S(t)		↘	min	↗

מסקנה: עבור $t = 2$ מתקבל ערך מינימלי של הפונקציה $S(t)$.

שיעורי הנקודה A עבור $t = 2$ הם : **A(2;6)**.

2) השטח המינימלי של המלבן: $S(2) = 2\cdot 2+10+\frac{8}{2} = \mathbf{18}$

ב. גדול יותר – השטח המינימלי הוא 18 והוא מתקבל בתחום $x > 0$ רק בנקודה A.

בכל נקודה אחרת על גרף הפונקציה f(x) בתחום $x > 0$ יתקבל באופן זה מלבן בעל שטח גדול יותר.

תשובות

1. א. בשעה 13:00   ב. 1) מהירות הנסיעה של הקטנוע: 80 קמ"ש ,
מהירות הנסיעה של המכונית: 100 קמ"ש   2) בשעה 12:00

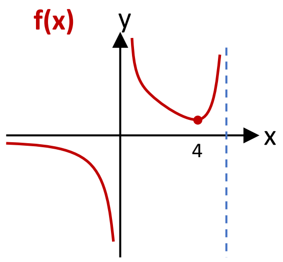
2. א. 1) $D(0;2)$ 2) $(-\frac{1}{2};5\frac{1}{2})$ 3) $y=\frac{1}{7}x+\frac{39}{7}$ ב. 1) $5\sqrt{2}$
ג. 1) $(x-\frac{1}{2})^2+(y-5\frac{1}{2})^2=12\frac{1}{2}$ 2) $y=\frac{1}{7}x+9\frac{1}{7}$ 3) כן   ד. 9.82

3. א. 32   ב. $\frac{55}{124}$ ג. 1) $\frac{265}{496}$ 2) $\frac{44}{53}$ ג. $\frac{85}{182}$

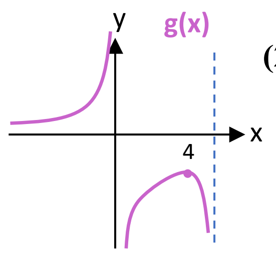
4. ב. $R = 7.5$ ג. $S_{ABCD} = 69.264$ ד. $S_{\Delta ABC} = 54$, $S_{\Delta ADC} = 15.264$

5. א. 1) $\measuredangle CEB = \measuredangle EBC = 25^o$, $\measuredangle ECB = 130^o$ 2) $\measuredangle CED = \measuredangle EDC = 50^o$, $\measuredangle ECD = 80^o$ 3) $\measuredangle CDA = \measuredangle ABC = 130^o, \measuredangle DCB = \measuredangle DAB = 50^o$ 4) 10
ב. 1) $EB = 18.126$, $ED = 12.856$ 2) $AM = 14.28$ 3) $R = 16.89$

6. א. $x = 4$, מינימום   ב. $a = 6$ ג. 1) $x < 0 , 0 < x < 6$
2) תחום העלייה: $4 < x < 6$, תחום הירידה: $x < 0 , 0 < x < 4$
נקודת המינימום: $(4;\frac{\sqrt{2}}{2})$ 3)

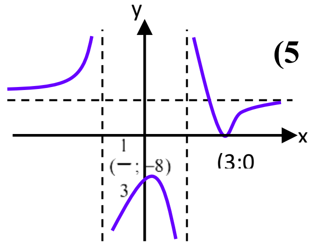


ד. 1) $(4;-1)$ מקסימום   2)



3) $-1 < k \le 0$

7. א. $a = 1$, $b = -1$ ב. 1) $x < -1 , -1 < x < 1 , x > 1$ 2) $(\frac{1}{3};-8)$ מקסימום , $(3;0)$ מינימום   3) תחומי העלייה: $x < -1$, $-1 < x < \frac{1}{3}$, $x > 3$; תחומי ירידה: $\frac{1}{3} < x < 1 , 1 < x < 3$ 4) $y = 1 , x = -1 , x = 1$ 5)



ג. גרף (2)   ד. $\frac{1}{6}$

8. א. 1) $A(2;6)$ ב. גדול יותר