שאלון 35581
קיץ 2022 - פתרונות

א.מ. ספרי מתמטיקה

מבחן מס' 1

פתרון שאלה מס' 1

א.

	מהירות (מטר/דקה)	זמן (דקות)	מרחק (מטר)
הילה	v_1	15	$15v_1$
רונית	v_2	12	$12v_2$
דקלה	v_3	10	$10v_3$

$$15v_1 = 12v_2 = 10v_3 \Rightarrow v_3 = 1.5v_1, v_2 = \frac{5}{4}v_1$$

דקלה חלפה על פניה של הילה בפעם השנייה כאשר המרחק ביניהן היה סיבוב שלם:

	מהירות (מטר/דקה)	זמן (דקות)	מרחק (מטר)
הילה	v_1	$\frac{7200}{v_1}$	$9900 - 2700 = 7200$
דקלה	$1.5v_1$	$\frac{9900}{1.5v_1} = \frac{6600}{v_1}$	9900

מקבלים:

$$\frac{7200}{v_1} = \frac{6600}{v_1} + 5 \Rightarrow \frac{600}{v_1} = 5 \Rightarrow v_1 = 120 \Rightarrow v_2 = \frac{5}{4} \cdot 120 = 150, v_3 = 1.5 \cdot 120 = 180$$

$\Leftarrow$ מהירויות הריצה הן :

הילה: 120 מ'/דקה , רונית : 150 מ'/דקה , דקלה: 180 מ'/דקה

ב.

	מהירות (מטר/דקה)	זמן (דקות)	מרחק (מטר)
רונית	150	$\frac{x - 2700}{150}$	x - 2700
דקלה	180	$\frac{x}{180}$	x

מקבלים: $\frac{x}{180}+2=\frac{x-2700}{150}\Rightarrow 5x+1800=6(x-2700)\Rightarrow x=18000\Rightarrow$

דקלה עברה מרחק של 18000 מ' = **18 ק"מ** עד שחלפה על פניה של רונית בפעם השנייה

ג. הילה ודקלה הגיעו יחד לנקודה A כאשר כל אחת השלימה מספר שלם של סיבובים. נסמן ב- n את מספר הסיבובים שרצה הילה ונסמן ב- k את מספר הסיבובים שרצה דקלה. מקבלים :

$$\frac{2700n}{120}=\frac{2700k}{180}\Rightarrow\frac{n}{120}=\frac{k}{180}\Rightarrow 3n=2k\Rightarrow$$

הילה משלימה שני סיבובים שלמים בזמן שדקלה משלימה שלושה סיבובים שלמים לכן:

הילה עוברת מרחק של $2700\cdot 2=5400$ m , דקלה עוברת מרחק של $2700\cdot 3=8100$ m

פתרון שאלה מס' 2

א. $\underbrace{a_1,a_2,a_3,.....,a_{n-1}}$, a_n, $\underbrace{a_{n+1},.......a_{2n-1}}$.

סכום n - 1 האיברים הראשונים של הסדרה הוא הסכום:

$$a_1+a_2+a_3+.....+a_{n-1}=\frac{a_1(q^{n-1}-1)}{q-1}$$

וסכום n – 1 האיברים האחרונים של הסדרה הוא הסכום: $a_{n+1}+a_{n+2}+a_{2n-1}=\frac{a_{n+1}(q^{n-1}-1)}{q-1}$.

היחס שמתקבל: $\frac{a_{n+1}(q^{n-1}-1)}{q-1}:\frac{a_1(q^{n-1}-1)}{q-1}=\frac{a_{n+1}(q^{n-1}-1)}{q-1}\cdot\frac{q-1}{a_1(q^{n-1}-1)}=$

$$\frac{a_{n+1}}{a_1}=\frac{a_1q^n}{a_1}=\mathbf{q^n}$$

ב. (1 נתון: $q^n=64$. האיבר האמצעי של הסדרה הוא a_n . סכום n האיברים האחרונים בסדרה הוא הסכום: $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+.....+a_{2n-1}$. מקבלים: $\frac{a_n(q^n-1)}{q-1}=63\cdot a_n$

$$\Rightarrow\frac{a_n(64-1)}{q-1}=63a_n\Rightarrow 63a_n=63\cdot a_n(q-1)\Rightarrow q-1=1\Rightarrow\mathbf{q=2}$$

$$q^n=64\Rightarrow 2^n=2^6\Rightarrow n=2\Rightarrow 2n-1=\mathbf{11}$$ (2

ג. הסדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה : $a_1,a_3,a_5...a_{11}$ האיבר הראשון הוא a_1, המנה היא $q^2=4$ ומספר האיברים הוא 6 .

מקבלים: $\frac{a_1(4^6-1)}{4-1}=170\frac{5}{8}\Rightarrow 4095a_1=\frac{4095}{8}\Rightarrow\mathbf{a_1=\frac{1}{8}}$

ד. 1) נתון: $b_n = -\frac{4}{a_n}$. ידוע: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{8}\cdot 2^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{8}$

$$\Rightarrow b_n = -\frac{4}{a_n} \Rightarrow b_{n+1} = -\frac{4}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = -\frac{4}{a_{n+1}}\cdot\left(-\frac{a_n}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$ הסדרה הנדסית ומנתה $\frac{1}{2}$

2) $N = 11$, $q = \frac{1}{2}$, $b_1 = -\frac{4}{a_1} = -4:\frac{1}{8} = -32$. מקבלים:

$$S_{11} = \frac{-32(0.5^{11}-1)}{0.5-1} = \mathbf{-63\frac{31}{32}}$$

ה. בסדרה $b_1, -b_3, b_5, -b_7, \ldots$ מתקיים: $A_1 = b_1 = -32$, $Q = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

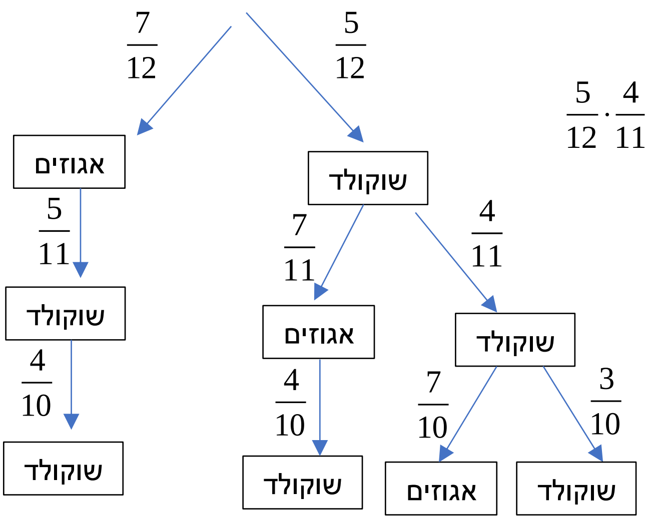
לכן, סכום הסדרה האינסופית הוא $S = \frac{-32}{1-(-\frac{1}{4})} = \mathbf{-25.6}$

פתרון שאלה מס' 3

א. 1) ההסתברות שליאת וליהי קיבלו לפחות חטיף שוקולד אחד היא המשלים של המקרה ששתיהן קיבלו חטיף אגוזים: בקופסא n חטיפים בסה"כ, 5 מהם חטיפי שוקולד ו- n – 5 חטיפי אגוזים.
ההסתברות שגם ליאת וגם ליהי הוציאו חטיף אגוזים היא: $\frac{n-5}{n}\cdot\frac{n-6}{n-1} = \frac{n^2-11n+30}{n^2-n}$. מקבלים:

$$1-\frac{n^2-11n+30}{n^2-n} = \frac{15}{22} \Rightarrow \frac{n^2-11n+30}{n^2-n} = \frac{7}{22} \Rightarrow 22n^2-242n+660 = 7n^2-7n \Rightarrow$$

$$15n^2-235n+660 = 0 \Rightarrow n = 12, n = 3\frac{2}{3} \Rightarrow \mathbf{n = 12}$$



2) $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \mathbf{\frac{1}{22}}$

3) $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}+\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} = \frac{480}{1320} = \mathbf{\frac{4}{11}}$

4) הסתברות מותנית:
התנאי: לפחות שני ילדים קיבלו חטיף שוקולד
הדרישה: ילד מסוים לא קיבל
חישוב: $\frac{\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{4}{11}} = \mathbf{\frac{7}{24}}$

ב. במקרה הקודם , עבור 5 חטיפי שוקולד
מבין 12 החטיפים , ההסתברות ששלושת הזוכים
קיבלו חטיף שוקולד היא $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}$.

כעת, כאשר 6 מבין החטיפים בקופסה הם חטיפי שוקולד , מתקבלת ההסתברות: $\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{1}{11}$

$\frac{1}{11}=2\cdot\frac{1}{22}\Rightarrow$ ההסתברות **גדלה פי 2**

פתרון שאלה מס' 4

	טענה	נימוק
א. (1	$AF \parallel BD$	נתון
	$\sphericalangle AFE=\sphericalangle EBD$	ישרים מקבילים יוצרים זוויות מתחלפות שווֹת
	$\sphericalangle ABF=\sphericalangle EDB$	זווית בין משיק למיתר
	$\Rightarrow \Delta BFA\sim\Delta DBE$	משפט דמיון ז.ז.
	$\Rightarrow \frac{BF}{DB}=\frac{FA}{BE}=\frac{BA}{DE}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים
	$\Rightarrow AF\cdot DB=BF\cdot BE$	מ.ש.ל.
(2	נסמן $FE=x$ ונקבל $FB=2.5x\ ,\ EB=1.5x$	סימון
	$\sphericalangle FAE=\sphericalangle EDB$	ישרים מקבילים יוצרים זוויות מתחלפות שווֹת
	$\sphericalangle EDB=\sphericalangle ABF$	הוכח
	$\Rightarrow \sphericalangle FAE=\sphericalangle ABF$	כלל המעבר
	$\sphericalangle AFE=\sphericalangle AFB$	זווית משותפת
	$\Rightarrow \Delta AFE\sim\Delta BFA$	משפט דמיון ז.ז.
	$\Rightarrow \frac{AF}{BF}=\frac{AE}{BA}=\frac{FE}{FA}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים
	$\Rightarrow AF^2=BF\cdot FE$	
	$\Rightarrow AF^2=2.5x\cdot x=2.5x^2\Rightarrow AF=x\sqrt{2.5}$	חישוב
	$\Rightarrow \frac{AF}{FE}=\frac{x\sqrt{2.5}}{x}=\sqrt{2.5}$	
ב.	$\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta AFB}}=\left(\frac{AF}{BF}\right)^2=\left(\frac{x\sqrt{2.5}}{2.5x}\right)^2=\frac{1}{2.5}=\frac{2}{5}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הצלעות המתאימות
	$\Rightarrow \frac{S}{S_{\Delta AFB}}=\frac{2}{5}\Rightarrow \mathbf{S_{\Delta AFB}=2.5S}$	משפט דמיון ז.ז.

ג.	$AF=\sqrt{10}\Rightarrow x\sqrt{2.5}=\sqrt{10}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2.5}}=2$	חישוב
	$\frac{FA}{BE}=\frac{BA}{DE}$	הוכח בסעיף א-1)
	$\Rightarrow\frac{\sqrt{10}}{1.5\cdot 2}=\frac{AB}{6}\Rightarrow AB=2\sqrt{10}\approx\mathbf{6.32}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
	$\Rightarrow AC=AB\approx\mathbf{6.32}$	שני משיקים היוצאים מאותה נקודה למעגל שווים זה לזה

<u>פתרון שאלה מס' 5</u>

א. אלכסוני המלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה , לכן, במשולש שווה-שוקיים BMC :

$$\sphericalangle BMC=2\alpha\Rightarrow\sphericalangle BCM=\sphericalangle CBM=90^\circ-\alpha\Rightarrow\sphericalangle ACD=\alpha$$

במשולש ישר הזווית <u>CAD</u> : $AD=BC=k\Rightarrow \sin\alpha=\frac{k}{AC}\Rightarrow AC=\frac{k}{\sin\alpha}\Rightarrow MC=\frac{k}{2\sin\alpha}$

במשולש <u>MCP</u>:

$$\cos\alpha=\frac{MC}{CP}\Rightarrow CP=\frac{MC}{\cos\alpha}=\frac{k}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{k}{\sin2\alpha}\Rightarrow \mathbf{CP=\frac{k}{\sin2\alpha}}$$

ב. 1) $S_{\Delta CMP}=\frac{1}{2}\cdot CM\cdot CP\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2\sin\alpha}\cdot\frac{k}{\sin2\alpha}\cdot\sin\alpha=\frac{k^2}{4\sin2\alpha}$

$$S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}\cdot CM^2\cdot\sin2\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k}{2\sin\alpha}\right)^2\cdot\sin2\alpha=\frac{k^2\cdot2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{8\sin^2\alpha}=\frac{k^2\cos\alpha}{4\sin\alpha}$$

$$\frac{S_{\Delta CMP}}{S_{\Delta BMC}}=\frac{k^2}{4\sin2\alpha}\cdot\frac{4\sin\alpha}{k^2\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\mathbf{\frac{1}{2\cos^2\alpha}}$$

2) אם $S_{\Delta BMP}=2S_{\Delta CMP}\Rightarrow\frac{1}{2\cos^2\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos\alpha=1\Rightarrow\alpha=360^\circ k$

לא יתכן עבור $0<\alpha<90^\circ$.

3) $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha\Rightarrow S_{\Delta BMC}=S_{\Delta BMA}\Rightarrow S_{ABCD}=4\cdot S_{\Delta BMC}=\frac{k^2\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$S_{\Delta CMP}=0.213\cdot S_{ABCD}\Rightarrow\frac{S_{\Delta CMP}}{4\cdot S_{\Delta BMA}}=0.213\Rightarrow\frac{S_{\Delta CMP}}{S_{\Delta BMA}}=0.852\Rightarrow\gamma$$

$$\frac{1}{2\cos^2\alpha}=0.852\Rightarrow\cos^2\alpha=0.5868\Rightarrow\cos\alpha=0.766\Rightarrow\mathbf{\alpha=40^\circ}$$

ג. במשולש CMP:

$$MC=\frac{k}{2\sin 40^\circ}=0.778k \Rightarrow \tan 40^\circ=\frac{MP}{0.778k}\Rightarrow MP=0.653k$$

במשולש BMP :

$$MB=MC=0.778k\ ,\ MP=0.653k\ ,\ \sphericalangle BMP=90^\circ+80^\circ=170^\circ \Rightarrow$$

$$BP^2=(0.778k)^2+(0.653k)^2-2\cdot 0.778k\cdot 0.653k\cdot\cos 170^\circ=2.032k^2\Rightarrow$$

$$BP=1.426k=14.26\Rightarrow \mathbf{k=10}$$

פתרון שאלה מס' 6

א. 1) $x=1$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x לכן מתקיים: $1-b\cdot\sqrt{1}=0\Rightarrow \mathbf{b=1}$.

$y=2$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y וגם $x\ge 0$ לכן:

$$x\to\infty\Rightarrow y\to\frac{ax}{x}=a\Rightarrow \mathbf{a=2}$$

2) מקבלים: $f(x)=\dfrac{2x}{x-\sqrt{x}}$. תחום ההגדרה: $x\ge 0$ וגם $x-\sqrt{x}\ne 0 \Leftarrow$

$$x\ne\sqrt{x}\Rightarrow x^2\ne x\Rightarrow x(x-1)\ne 0\Rightarrow x\ne 0, x\ne 1$$

מתקבל התחום: $\mathbf{0<x<1\ ,\ x>1}$.

3) נבדוק האם $x=0$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x :

כאשר $x\to 0^+$, גם המונה של הפונקציה שואף לאפס , לכן:

$$x\to 0^+\to f(x)=\frac{2\cdot(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}}=\frac{2\cdot(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow$$

$x\to 0^+\Rightarrow f(x)\to\dfrac{0}{-1}=0\Rightarrow$ "נקודה ריקה" $(0;0)$.

מסקנה: **אין** אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים

ב. 1) על פי סעיף א-3) מתקיים : $\dfrac{2x}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ לכל $x\ne 0$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ הוא $x\ge 0$ וגם $x\ne 1$, כלומר:

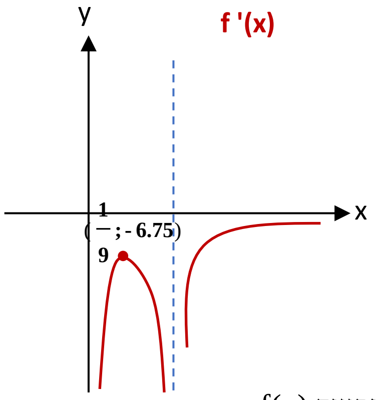
$0\le x<1\ \ , x>1$. תחומי ההגדרה אינם שווים , לכן $h(x)\ne f(x)$.

2) בתחום ההגדרה של $f(x)$ מתקיים $\dfrac{2x}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ לכן:

$$f'(x)=\frac{2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

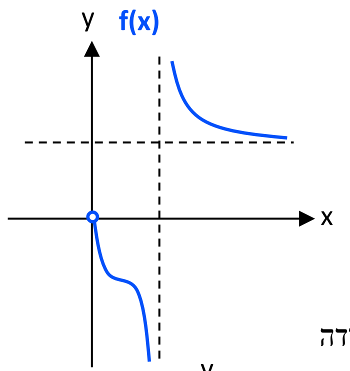
$\frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}<0$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה , לכן , הפונקציה f(x) יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. 1) על פי הנתונים:



x	0	< x <	$\frac{1}{9}$	< x <	1	< x
f '(x)		↗	max	↘		↗
f ''(x)		+	0	-		+
f(x)		∪	פיתול	∩		∪

$f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{2\sqrt{\frac{1}{9}}}{\sqrt{\frac{1}{9}}-1}=-1$ לכן : הנקודה $\left(\mathbf{\frac{1}{9};-1}\right)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה f(x) .

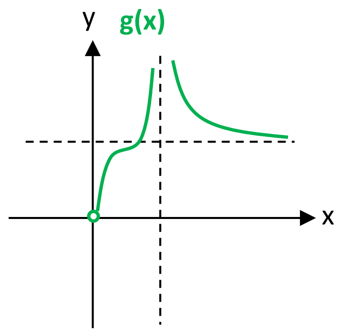


2) **תחום הקעירות כלפי מעלה:** $\mathbf{0<x<\frac{1}{9},x>1}$ **;**

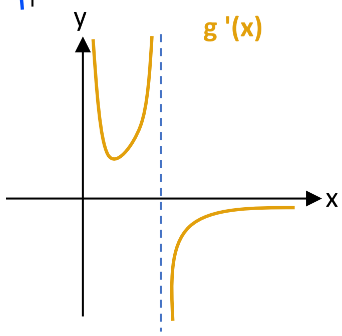
תחום הקעירות כלפי מטה: $\mathbf{\frac{1}{9}<x<1}$

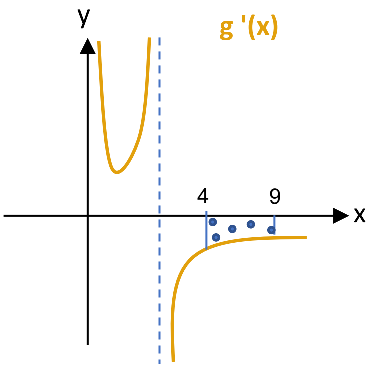
3)

ד. 1) נסרטט תחילה את גרף הפונקציה g(x) :



ונקבל, על פי תחומי העלייה והירידה של g(x) :





2) $S=\int_4^9\left(0-g'(x)\right)dx=\left[-g(x)\right]_4^9$

בתחום x > 1 הפונקציה f(x) חיובית , לכן g(x) = f(x) , לכן:

$\left[-g(x)\right]_4^9=\left[-f(x)\right]_4^9=-f(9)+f(4)=$

$=-\frac{2\sqrt{9}}{\sqrt{9}-1}+\frac{2\sqrt{4}}{\sqrt{4}-1}=\mathbf{1}$

פתרון שאלה מס' 7

א. 1) הפונקציה $f(x)$: $f(x) = \sin^2 x - 2.5\sin x + 1$

$\sin x = 0.5\ ,\ \sin x = 2 \Leftarrow 0 = \sin^2 x - 2.5\sin x + 1\ ,f(0) = 1 \Rightarrow \mathbf{(0;1)}$

$\sin x \le 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k\ ,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

הפתרונות בתחום $0 \le x \le \pi$: $x = \frac{\pi}{6}\ ,\ x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6};0\right),\left(\frac{5\pi}{6};0\right)$

הפונקציה $g(x)$: $g(x) = \sin x + \cos x$

$\cos x \ne 0,\ 0 = \tan x + 1 \Leftarrow 0 = \sin x + \cos x\ ,\ g(0) = 1 \Rightarrow \mathbf{(0;1)}$

$\Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{4};0\right)$

2) הפונקציה $f(x)$:

$f'(x) = 2\sin x\cos x - 2.5\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x - 2.5) = 0 \Rightarrow$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = -0.5$

אין פתרון $2\sin x - 2.5 = 0 \Rightarrow \sin x = 1.25 > 1 \Rightarrow$

$f'(x) = 2\sin x\cos x - 2.5\cos x = \sin 2x - 2.5\cos x \Rightarrow f''(x) = 2\cos 2x + 2.5\sin x \Rightarrow$

נקודת מינימום $f''(\frac{\pi}{2}) = 0.5 \Rightarrow \mathbf{(\frac{\pi}{2};-\frac{1}{2})}$

נקודות הקצה: **(0;1) מקסימום , (π;1) מקסימום**

הפונקציה $g(x)$:

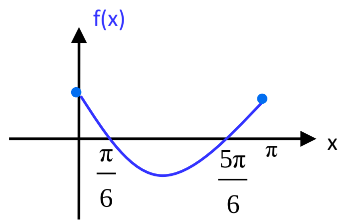
$g'(x) = \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \sqrt{2}$

נקודת מקסימום $g''(x) = -\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow g''(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4};\sqrt{2}\right)$

נקודות הקצה: **(0;1) מינימום , (π;-1) מינימום**

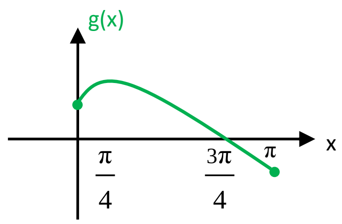
3) על פי הממצאים, הגרף של $f(x)$ הוא:



תחומי החיוביות: $\mathbf{0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} < x < \pi}$

תחום השליליות: $\mathbf{\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}}$

גרף הפונקציה $\mathbf{g(x)}$:



תחום החיוביות: $\mathbf{0 < x < \frac{3\pi}{4}}$,

תחום השליליות: $\mathbf{\frac{3\pi}{4} < x < \pi}$

ב. $h(x) = \frac{\sin^2 x - 2.5\sin x + 1}{\sin x + \cos x}$.

1) אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x מתקבלת בנקודה בה $g(x) = 0$: $\mathbf{x = \frac{3\pi}{4}}$.

2) $h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \left(\mathbf{\frac{\pi}{6};0}\right), \left(\mathbf{\frac{5\pi}{6};0}\right)$; $h(0) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \mathbf{(0;1)}$

3) על פי תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$ ו- $g(x)$:

x	0	$<x<$	$\frac{\pi}{6}$	$<x<$	$\frac{3\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{5\pi}{6}$	$<x<$	π
f(x)	1	+	0	-		-	0	+	1
g(x)	1	+	+	+		-	-	-	-1
h(x)	1	+	0	–		+	0	-	-1

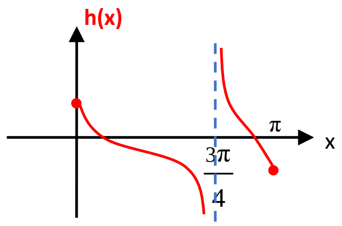
תחומי החיוביות: $\mathbf{\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}}$, $\mathbf{0 < x < \frac{\pi}{6}}$,

תחומי השליליות: $\mathbf{\frac{5\pi}{6} < x < \pi}$, $\mathbf{\frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{4}}$

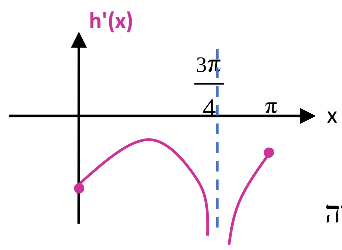
ג. 1) נתון: $h'(x) < 0$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$, לכן, הפונקציה יורדת

בכל תחום הגדרה. אם כן, נקודות הקיצון היחידות מתקבלות בנקודות הקצה של הפונקציה :

2) **(0;1) נקודת מקסימום , (π;-1) מינימום**



3)



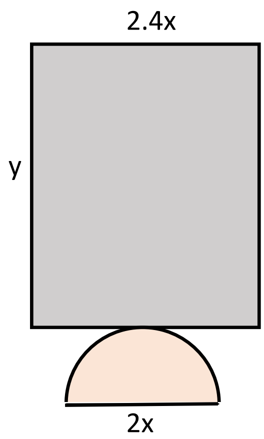
ד. **לא -**

$h'(x) \neq 0$

לכל x בתחום ההגדרה

של הפונקציה $h'(x)$, לכן , אין לפונקציה $k(x)$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x .

פתרון שאלה מס' 8



א. קוטר חצי המעגל הוא $2x$. רוחב המלבן גדול ב-20%

מקוטר חצי העיגול , לכן , רוחב המלבן הוא: $1.2\cdot 2x = 2.4x$.

נסמן ב- y את גובה המלבן. מקבלים:

היקף המלבן הוא $2(2.4x + y)$, היקף חצי המעגל הוא πx

וקוטר המעגל הוא $2x$. לכן:

$$2(2.4x + y) + \pi x + 2x = 2a \Rightarrow 2.4x + y + \frac{\pi}{2}x + x = a \Rightarrow$$

$$y = a - (3.4 + \frac{\pi}{2})x \Rightarrow y = a - 4.97x\ ,\ y > 0 \Rightarrow$$

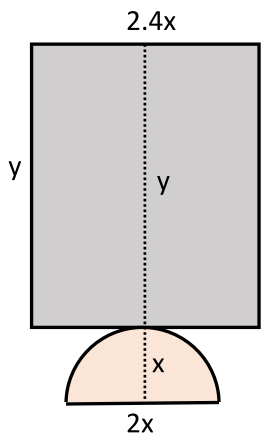
$$a > 4.97x \Rightarrow x < 0.2a \Rightarrow \mathbf{0 < x < 0.2a}$$

ב. הפונקציה המתארת את סכום שטחי המלבן וחצי העיגול:

$$f(x) = \frac{\pi x^2}{2} + 2.4x(a - 4.97x) = \frac{\pi x^2}{2} + 2.4ax - 11.928x^2 = 1.571x^2 + 2.4ax - 11.928x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2.4ax - 10.357x^2 \Rightarrow f'(x) = 2.4a - 20.714x = 0 \Rightarrow x = 0.116a$$

$f''(x) = -20.714 < 0 \Rightarrow$ סכום השטחים מקסימלי **$x = 0.116a$** עבור



ג. גובה התמונה הוא $h = x + y = x + a - 4.97x \Rightarrow h = a - 3.97x$

אם $h = 0.6a$ מקבלים : $0.6a = a - 3.97x \Leftarrow x = 0.1a$.

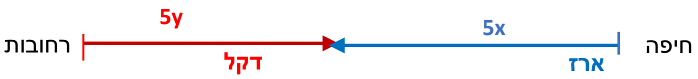
השטח המקסימלי מתקבל עבור $x = 0.116a$, לכן , בתחום בו

$0 < x < 0.2a$ ערכי הפונקציה $f(x)$ **קטנים מן הערך המקסימלי**.

מבחן מס' 2

פתרון שאלה מס' 1

א.



		מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
עד הפגישה	ארז	x	5	5x
	דקל	y	5	5y
כל הדרך	ארז	x	$\frac{5x + 5y}{x}$	5x + 5y
	דקל	y	$\frac{5x + 5y}{y}$	5x + 5y

מקבלים: $\frac{5x + 5y}{x}+\frac{175}{60}=\frac{5x + 5y}{y}\Rightarrow 5+\frac{5y}{x}+\frac{35}{12}=\frac{5x}{y}+5\Rightarrow$

נסמן: $\frac{y}{x}=t$ ונקבל: $5t+\frac{35}{12}=\frac{5}{t}\Rightarrow t+\frac{7}{12}=\frac{1}{t}\Rightarrow 12t^2+7t-12=0\Rightarrow$

$t_1=\frac{3}{4}, t_2=-\frac{4}{3}\Rightarrow \frac{y}{x}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

ב. נסמן: $y = 0.75x$ ונקבל:

		מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
כל הדרך	ארז	x	$\frac{8.75x}{x}=8\frac{3}{4}$	$5\cdot 0.75x + 5x =$ 8.75x
	דקל	0.75x	$\frac{8.75x}{0.75x}=11\frac{2}{3}$	8.75x

קיבלנו: **ארז:** $\mathbf{8\frac{3}{4}}$ **שעות , דקל:** $\mathbf{11\frac{2}{3}}$ **שעות**

ג. 1)

		מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
אחרי הפגישה	ארז	0	1	0
		x - 1	$\frac{3.75x}{x - 1}$	5y = 3.75x
	דקל	0	1	0
		0.75x	$\frac{5x}{0.75x}=6\frac{2}{3}$	5x

מקבלים: $\mathbf{x = 16} \Leftarrow 3.75x = 4x - 4 \Leftarrow \frac{3.75x}{x-1} = 4 \Leftarrow 6\frac{2}{3}+1 = \frac{3.75x}{x-1}+1+2\frac{2}{3}$

$\Rightarrow y = 0.75\cdot 16 = \mathbf{12} \Rightarrow$

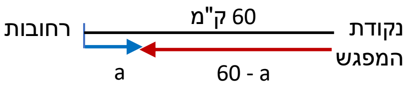
מהירות הרכיבה של ארז: 16 קמ"ש , מהירות הרכיבה של דקל: 12 קמ"ש

2) ארז ודקל נפגשו בשעה 12^{00}. זמן הרכיבה של ארז אחרי הפגישה :

$5 = \frac{3.75\cdot 16}{15}$ לכן $1+$, ארז הגיע לרחובות בשעה $\mathbf{17^{00}}$.

ד. המרחק מנקודת המפגש הראשונה עד רחובות הוא :

היא ק"מ $5\cdot 12 = 60$



ארז ודקל נפגשו בשעה 12^{00} והמשיכו בדרכם בשעה 13^{00}.

ארז עבר מרחק של 60 ק"מ במהירות של 15 קמ"ש

במשך שעות $\frac{60}{15} = 4$, כלומר, הוא הגיע לרחובות בשעה 17^{00}.

ארז התעכב ברחובות במשך 25 דקות ואז החל לרכב במהירות 16 קמ"ש לכיוון חיפה :

		מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
מרחובות למפגש השני	ארז	16	$\frac{a}{16}$	a
מהמפגש הראשון עד המפגש השני	דקל	12	$\frac{60-a}{12}$	$60 - a$

מקבלים: $\Leftarrow 3a + 212 = 4(60-a) \Leftarrow \frac{a}{16}+\frac{53}{12} = \frac{60-a}{12} \Leftarrow \frac{a}{16}+4\frac{25}{60} = \frac{60-a}{12}$

המפגש השני עם דקל היה במרחק **4 ק"מ** מרחובות $\Rightarrow a = 4 \Rightarrow 7a = 28$

פתרון שאלה מס' 2

א.

הסדרה	A_1	q	N	A_{n+1}
a_n	$a_1 = 81b_1$	q	$n+1$	$81b_1\cdot q^n$
b_n	b_1	q^2	$n+1$	$b_1\cdot q^{2n}$

נתון: $\mathbf{q^n = 243} \Leftarrow q^{2n} = 243q^n \Leftarrow b_1\cdot q^{2n} = 3\cdot 81b_1\cdot q^n \Leftarrow b_{n+1} = 3a_{n+1}$

ב. 1)

הסדרה	A_1	q	N	S
a_n	$a_1 = 81b_1$	q	n	$\frac{81b_1(q^n-1)}{q-1}$
b_n	b_1	q^2	n	$\frac{b_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}$

$$q^{2n}=\left(q^n\right)^2=243^2=59049 \Leftarrow q^n=243$$

$$,\ S_n=\frac{81b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{81b_1(243-1)}{q-1}=\frac{81\cdot 242\cdot b_1}{q-1}$$

$$\Leftarrow 81\cdot T_n=61\cdot S_n\ ,\ T_n=\frac{b_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}=\frac{b_1(59049-1)}{q^2-1}=\frac{59048b_1}{q^2-1}$$

$$\frac{81\cdot 59048\cdot b_1}{q^2-1}=\frac{61\cdot 81\cdot 242\cdot b_1}{q-1}\Rightarrow\frac{59048}{(q+1)(q-1)}=\frac{61\cdot 242}{q-1}\Rightarrow$$

$$59048=14762(q+1)\Rightarrow 4=q+1\Rightarrow \mathbf{q=3}$$

2) $q^n=243\Rightarrow 3^n=3^5\Rightarrow \mathbf{n=5}$

ג. 1) $c_n=\frac{a_n}{b_n}\Rightarrow c_{n+1}=-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Rightarrow\frac{c_{n+1}}{c_n}=-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\cdot\frac{b_n}{a_n}=-\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n+1}}=$

$=-\frac{3a_n}{a_n}\cdot\frac{b_n}{3^2\cdot b}\Rightarrow\frac{c_{n+1}}{c_n}=-\frac{1}{3}\Rightarrow$ הסדרה c_n היא סדרה הנדסית

מנת סדרה היא $-\frac{1}{3}$. $0<\left|-\frac{1}{3}\right|<1$, לכן הסדרה מתכנסת

2) $c_1=\frac{a_1}{b_1}=\frac{81b_1}{b_1}=81$. מקבלים:

$$c_1+c_2+c_3=81+81\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+81\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=81\cdot(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9})=63$$

סכום הסדרה האינסופית $c_1+c_2+c_3+c_4+.....$ הוא:

$$\frac{c_1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{81}{1\frac{1}{3}}=60.75\Rightarrow\frac{60.75}{63}=\mathbf{\frac{27}{28}}$$

פתרון שאלה מס' 3

נסמן : A – קבוצת הנבחנים שבחרו בגיאומטריה , $\bar{A}$ - קבוצת הנבחנים שבחרו בטריגונומטריה

B – הנבחנים שהצליחו יפה בפרק השני , $\bar{B}$ - הנבחנים שלא הצליחו יפה בפרק השני .

נתון: $P(A)=2\frac{1}{3}P(\bar{A})\Rightarrow 1-P(\bar{A})=2\frac{1}{3}P(\bar{A})\Rightarrow 3\frac{1}{3}P(\bar{A})=1\Rightarrow P(\bar{A})=0.3$

$P(A\cap B)=0.45\ ,\ P(A/B)=\frac{9}{13}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{9}{13}$.

מקבלים: $\frac{0.45}{P(B)}=\frac{9}{13}\Rightarrow P(B)=0.65\Rightarrow$ **65%** הצליחו יפה בפרק השני .

ב.

	A	$\bar{A}$	
B	0.45	0.2	0.65
$\bar{B}$	0.25	0.1	0.35
	0.7	0.3	1

1) $p = 0.7\ ,\ n = 6\ ,\ k = 0,1,2,3,4,5$

מקבלים:

$$P = 1 - P_6(6) = 1 - 0.7^6 = \mathbf{0.882351}$$

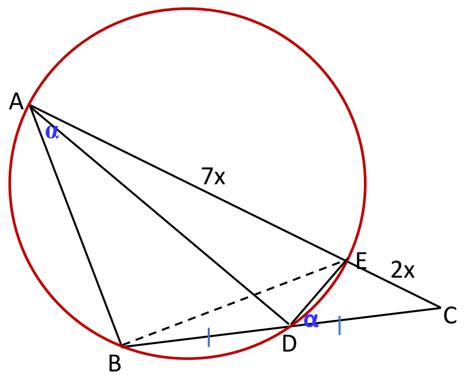
2) הסתברות מותנית: התנאי- לא כל 6 הנבחרים בחרו בגיאומטריה , כלומר, לכל היותר 5 מהם בחרו בגיאומטריה. הדרישה: לפחות 4 מהם בחרו בגיאומטריה , כלומר , 4 או 5 :

$$P = \frac{P_6(4) + P_6(5)}{0.882351} = \frac{\binom{6}{4}\cdot 0.7^4 \cdot 0.3^2 + \binom{6}{5}\cdot 0.7^5 \cdot 0.3}{0.882351} = \frac{0.626661}{0.882351} = \mathbf{0.71}$$

ג. בדיוק 3 מבין 6 הנבחנים בחר בגיאומטריה והנבחר הראשון בחר בטריגונומטריה , לכן 2 הנבחנים הנוספים מבין ה- 5 בחרו בטריגונומטריה. מקבלים:

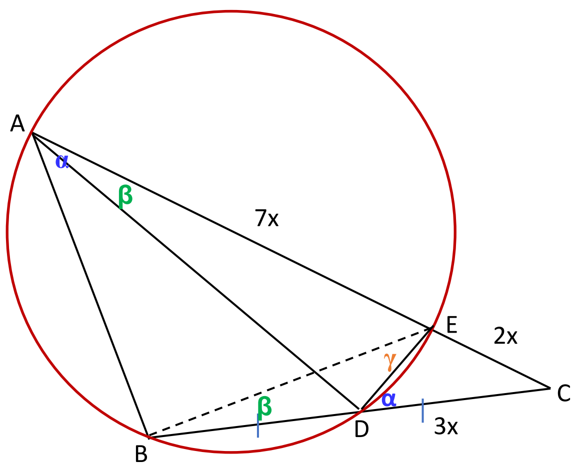
$$P = 0.3 \cdot P_5(2) = 0.3 \cdot \binom{5}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^3 = \mathbf{0.09261}$$

<u>פתרון שאלה מס' 4</u>



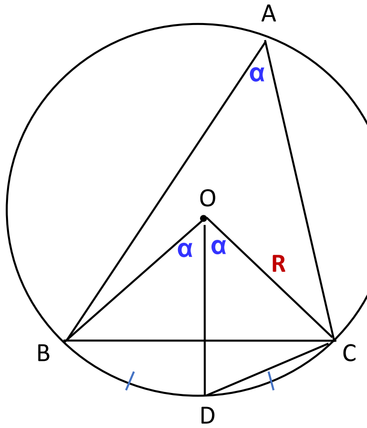
א.	ABDE בר חסימה	נתון
	$\Rightarrow \sphericalangle BAE + \sphericalangle BDE = 180^\circ$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180°
	נסמן: $\sphericalangle BAE = \alpha \Leftarrow \sphericalangle BDE = 180^\circ - \alpha$	
	$\Rightarrow \sphericalangle EDC = \alpha$	זוויות צמודות סכומן 180°
	$\sphericalangle C = \sphericalangle C$	זווית משותפת
	$\Rightarrow \Delta CDE \sim \Delta CAB$	משפט דמיון ז.ז.
	$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים

	$\frac{AE}{EC}=\frac{7}{2}$	נתון
	נסמן: $AE=7x\ ,\ EC=2x$	סימון
	$\frac{2x}{CB}=\frac{CD}{9x}\Rightarrow$	הצבה
	$BD=DC$	נתון: AD תיכון לצלע BC
	$\Rightarrow CB=2CD$	
	$\frac{x}{CD}=\frac{CD}{9x}\Rightarrow\frac{2x}{2CD}=\frac{CD}{9x}\Rightarrow$ $\Rightarrow CD^2=9x^2\Rightarrow CD=3x$ $\mathbf{BC=\frac{2}{3}AC}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{6x}{9x}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow BC=6x\Rightarrow$	הצבה וחישוב
	$S_{\Delta BEC}=16$	נתון
ב.	$S_{\Delta BED}=S_{\Delta CED}=8$	ED תיכון במשולש BEC ולכן הוא מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח
	$\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta CAB}}=\left(\frac{CD}{CA}\right)^2=\left(\frac{3x}{9x}\right)^2=\frac{1}{9}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הצלעות המתאימות
	$\frac{8}{S_{\Delta CAB}}=\frac{1}{9}\Rightarrow S_{\Delta CAB}=\mathbf{72}$	חישוב



ג.	נסמן: $\sphericalangle DAE=\beta$	סימון
	$\Rightarrow\sphericalangle EBD=\beta$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו
	אם $\sphericalangle DAE+\sphericalangle BED=90^\circ$	הצבה
	$\sphericalangle EBD+\sphericalangle BED=90^\circ$	
	$\sphericalangle BDE=90^\circ$	סכום זוויות במשולש BED
	$\Rightarrow\sphericalangle EDC=90^\circ$	זוויות צמודות סכומן 180°
	$\Rightarrow EC>DC$	היתר במשולש ישר זווית גדול מן הניצב
	$\Rightarrow 2x>3x\Rightarrow 2>3$	מתקבלת סתירה
	$\Rightarrow$ **לא יתכן**	

פתרון שאלה מס' 5



א. 1) $\sphericalangle BOD = \sphericalangle COD \Leftarrow BD = DC$ (זוויות מרכזיות
הנשענות על קשתות שוות). $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ (זווית
מרכזית גדולה פי 2 מן הזווית ההיקפית הנשענת על
אותה קשת) $\Leftarrow \sphericalangle BOD = \sphericalangle COD = \alpha \Leftarrow$

$$\mathbf{S_{\Delta ODC} = \frac{R^2\sin\alpha}{2}}.$$

משולש ABC חסום במעגל O , $\sphericalangle ABC = 60^\circ \Leftarrow$

$$\sphericalangle ACB = 120^\circ - \alpha \Rightarrow \frac{BC}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\sin\left(120^\circ - \alpha\right)} = 2R \Rightarrow$$

$$BC = 2R\sin(\alpha), AB = 2R\sin\left(120^\circ - \alpha\right) \Rightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{2R\sin(\alpha)\cdot 2R\sin\left(120^\circ - \alpha\right)\cdot\sin 60^\circ}{2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}R^2\sin(\alpha)\sin\left(120^o - \alpha\right)}$$

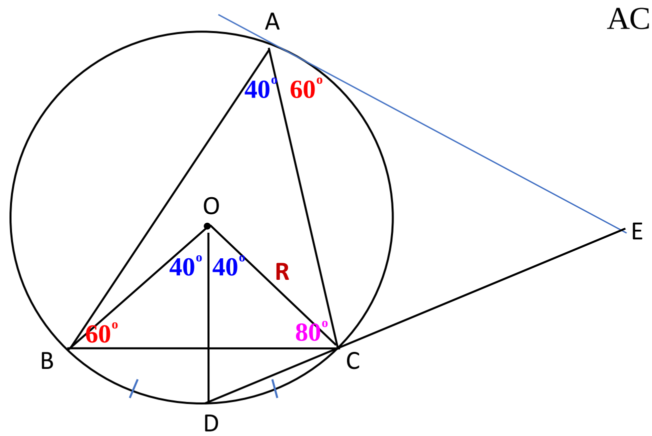
(2 $$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ODC}} = 5.31\sin\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}R^2\sin(\alpha)\sin(120^o\text{-}\alpha)}{\frac{R^2\sin(\alpha)}{2}} = 5.31\sin\alpha \Rightarrow$$

$$2\sqrt{3}R^2\sin(\alpha)\sin(120^o\text{-}\alpha) = 5.31R^2\sin^2\alpha \Rightarrow 2\sqrt{3}\sin(120^o - \alpha) = 5.31\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\sin(120^o - \alpha) = 1.532\sin\alpha \Rightarrow \sin(120^o)\cos\alpha - \cos(120^o)\sin\alpha = 1.532\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = 1.532\sin\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = 1.032\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\tan\alpha = 0.839 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 40^o}$$



ב. 1) במשולש ABC : $AC = 2R\sin 60^o = \sqrt{3}R$

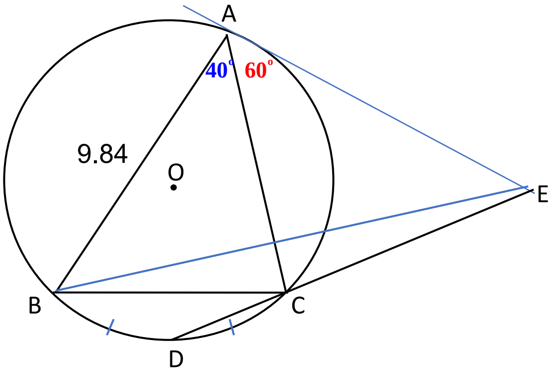
$\sphericalangle EAC = \sphericalangle ABC = 60^o$ (זווית בין
משיק למיתר). $\sphericalangle ACB = 80^o$
(סכום זוויות במשולש)

$$\sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\sphericalangle BOD = 20^o$$

$$\Rightarrow \sphericalangle ACD = 80^o + 20^o = 100^o$$

$\Rightarrow \measuredangle ACE = 80^o \Rightarrow \measuredangle AEC = 40^o$

במשולש AEC : $\dfrac{\sqrt{3}R}{\sin 40^\circ} = 2\cdot 6.736 \Rightarrow \mathbf{R = 5}$



2) במשולש ABE : $AB = 2R\sin 80^o = 9.848$

במשולש ACE : $AE = 2\cdot 6.736\cdot \sin 80^o = 13.267$

מקבלים: במשולש ABE :

$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos 100^o =$

$= 9.848^2 + 13.267^2 - 2\cdot 9.848\cdot 13.267\cdot \cos 100^o$

$BE^2 = 318.37 \Rightarrow \mathbf{BE = 17.84}$

פתרון שאלה מס' 6

א. 1) **אין** – נקודות הפיתול של f(x) הן נקודות קיצון של f '(x) .
לפונקציה המתוארת בציור אין נקודות קיצון.

(2

x	-π	< x <	a	< x <	b	< x <	π
f '(x)		. ↘		↗		↘	
f "(x)		-		+		-	
f(x)		∩		∪		∩	

תחומי הקעירות כלפי מעלה : a < x < b ,

תחומי הקעירות כלפי מטה: -π < x < a , b < x < π

3) **כן** – הנקודות (c;0) ו- (d;0) , c < d , הן נקודות פיתול של הפונקציה f '(x) , לכן , על פי גרף הפונקציה f '(x):

x	-π	< x <	a	< x <	c	< x <	b	< x <	d	< x <	π
f '(x)		.∩		∩	0	∪		∪	0	∩	
f "(x)		↘		↘	min	↗		↗	Max	↘	

(4

x	-π	< x <	a	< x <	c	< x <	b	< x <	d	< x <	π
f '(x)		-		-	0	+		+	0	-	
f (x)		↘		↘	min	↗		↗	Max	↘	

תחומי העלייה: c < x < b , b < x < d ,

תחומי הירידה: π < x < a , a < x < c , d < x < π

5) $S = \int_c^0 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_c^0 = f(0) - f(c) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx \mathbf{0.293}$.

ב. 1) $f(x)=\frac{k}{\cos x - \sin x}+p$. תחום ההגדרה של הפונקציה:

$$\cos x - \sin x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq \sin x \Rightarrow \tan x \neq 1, (\cos x \neq 0) \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}+\pi k$$

בתחום $-\pi \le x \le \pi$ מקבלים: $\mathbf{a=-\frac{3\pi}{4}, b=\frac{\pi}{4}} \Leftarrow x\neq -\frac{3\pi}{4}, x\neq\frac{\pi}{4}$

$$f(x)=\frac{k}{\cos x - \sin x}+p \Rightarrow f'(x)=\frac{-k(-\sin x-\cos x)}{(\cos x-\sin x)^2}=\frac{k(\sin x+\cos x)}{(\cos x-\sin x)^2}=0$$

$$\sin x+\cos x=0 \Rightarrow \sin x=-\cos x \Rightarrow \tan x=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$$

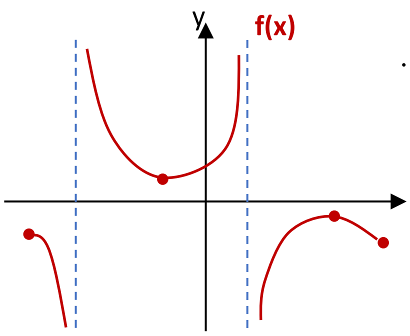
הפתרונות בתחום ההגדרה של הפונקציה: $\mathbf{c=-\frac{\pi}{4}, d=\frac{3\pi}{4}} \Leftarrow x=-\frac{\pi}{4}, x=\frac{3\pi}{4}$

2) נתון $\frac{k}{\sqrt2}+p=\frac{1}{\sqrt2} \Leftarrow f(-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt2} \Leftarrow f(c)=\frac{1}{\sqrt2}$

$$f(0)=f(c)+1-\frac{1}{\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}+1-\frac{1}{\sqrt2}=1 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow \frac{k}{1}+p=1 \Rightarrow p=1-k$$

מקבלים:

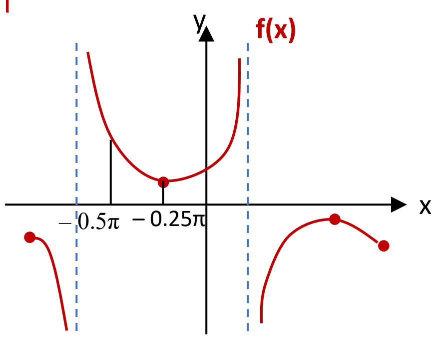
$$\frac{k}{\sqrt2}+1-k=\frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt2}-k=\frac{1}{\sqrt2}-1 \Rightarrow k(\frac{1}{\sqrt2}-1)=\frac{1}{\sqrt2}-1 \Rightarrow \mathbf{k=1} \Rightarrow \mathbf{p=0}$$



ג. 1) $.f(x)=\frac{1}{\cos x-\sin x} \Rightarrow f(-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt2}{2}, f(\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt2}{2} \Rightarrow$

נקודת מינימום של הפונקציה, $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt2}{2}\right)$

נקודת מקסימום $\left(\frac{3\pi}{4};-\frac{\sqrt2}{2}\right)$



2) בתחום $-0.5\pi < x \le -0.25\pi$
הפונקציה $f(x)$ חיובית וככל
ש- t גדל , ערך האינטגרל גדל
(מצטברים יותר ערכים חיוביים)
לכן , הפונקציה $g(t)$ **עולה**
בתחום $-0.5\pi < x \le -0.25\pi$

פתרון שאלה מס' 7

א. 1) תחום ההגדרה: $x^2 - 1 > 0 \Leftarrow$ **$x > 1$ או $x < -1$**

2) אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x : $x \to 1^+ \Rightarrow y \to \infty \Rightarrow \mathbf{x = 1}$

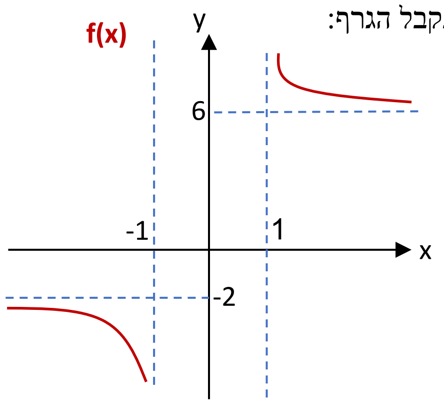
$x \to -1^- \Rightarrow y \to -\infty \Rightarrow \mathbf{x = -1}$

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y : $x \to \infty \Rightarrow y \to 2+4=6 \Rightarrow \mathbf{y = 6}$

$x \to -\infty \Rightarrow y \to 2-4=-2 \Rightarrow \mathbf{y = -2}$

3) נתון: $f'(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה , לכן , $f(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

מתקבל הגרף:



ב. 1) תחום ההגדרה: $x^2 - 1 \geq 0 \Leftarrow$ **$x \geq 1$ או $x \leq -1$**

2) הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$ לכן אין חיתוך עם ציר y .

חיתוך עם ציר x :

$$0 = 2x + 4\sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow 4\sqrt{x^2 - 1} = -2x \Rightarrow$$
$$2\sqrt{x^2 - 1} = -x \Rightarrow 4(x^2 - 1) = x^2 \Rightarrow$$

$3x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. בדיקת הפתרונות:

עבור $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$: $2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \neq 0 \Leftarrow$ לא פתרון

עבור $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$: $-2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{\frac{4}{3} - 1} = 0 \Leftarrow$ $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ פתרון.

מתקבלת הנקודה $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};0\right)$.

3) $$g(x) = 2x + 4\sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow g'(x) = 2 + 4\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 2 + \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}} = f(x)$$

4) על פי הגרף של $g'(x)$: נקודות הקצה: $g(1) = 2$, $g(-1) = -2$

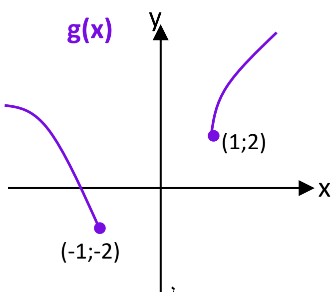
x	< x <	-1	< x <	1	< x
g '(x)	-				+
g (x)	↘	-2		2	↗

תחום העלייה: $x > 1$, תחום הירידה : $x < -1$

נקודות הקיצון מתקבלות רק בקצות תחום ההגדרה : **(-1;-2) מינימום , (1;2) מינימום**

5) נתון: $f'(x) < 0$ בכל תחום ההגדרה , לכן , $g''(x) < 0$ בכל תחום ההגדרה ולכן הפונקציה

g(x) קעורה כלפי מטה בכל תחום הגדרתה (6



ג. $$h(x) = ax + 4\sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow h'(x) = a + \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow$$

עבור $x \to \infty$ מתקבלת האסימפטוטה $y = a + 4$

עבור $x \to -\infty$ מתקבלת האסימפטוטה $y = a - 4$

לכן : $\mathbf{a = -3} \Leftarrow a + 4 = 1$ או: $a - 4 = 1 \Leftarrow$ $\mathbf{a = 5}$.

פתרון שאלה מס' 8

א. 1) אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x :

x = 0 אסימפטוטה $\Leftarrow x \to 0^- \Rightarrow y \to \infty, x \to 0^+ \Rightarrow y \to -\infty \Rightarrow$

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y :

אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $\Leftarrow x \to \infty \Rightarrow y \to \infty, x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty \Rightarrow$

(2 $0 = \frac{20}{x} - \frac{60}{x^3} + x \Rightarrow x^4 + 20x^2 - 60 = 0 \Rightarrow x^2 = 2.649, x^2 = -22.649 \Rightarrow$

$x = \pm 1.63 \Rightarrow \mathbf{(1.63;0), (-1.63;0)}$

(3 $f(x) = \frac{20}{x} - \frac{60}{x^3} + x \Rightarrow f'(x) = -\frac{20}{x^2} + \frac{180x^2}{x^6} + 1 = -\frac{20}{x^2} + \frac{180}{x^4} + 1 \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{x^4 - 20x^2 + 180}{x^4} = 0 \Rightarrow$ אין פתרון ממשי , לכן , אין לפונקציה נקודות קיצון

x	< x <	0	< x <
f '(x)	+		+
f (x)	↗		↗

הפונקציה **עולה בכל תחום הגדרתה .**

ב. $g(x) = \frac{x^4 - 20x^2 + 180}{x^4}$

1) אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x :

x = 0 אסימפטוטה $\Leftarrow x \to 0^- \Rightarrow g(x) \to -\infty, x \to 0^+ \Rightarrow g(x) \to \infty \Rightarrow$

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y :

y = 1 אסימפטוטה $\Leftarrow x \to \pm\infty \Rightarrow g(x) \to 1 \Rightarrow$

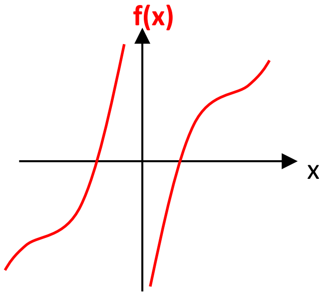
(2 **הפונקציה זוגית** $\Leftarrow g(-x) = \frac{(-x)^4 - 20(-x)^2 + 180}{(-x)^4} = \frac{x^4 - 20x^2 + 180}{x^4} = g(x) \Rightarrow$

3) g(x) פונקציה זוגית , לכן, אם הנקודה (4.24;0.44) היא נקודת מינימום של הפונקציה g(x)
אז גם הנקודה (-4.24;0.44) היא נקודת מינימום של הפונקציה g(x).
מקבלים:

	x <	- 4.24	< x <	0	< x <	4.24	< x
f '(x)	↘	min	↗		↘	min	↗
f "(x)	-	0	+		-	0	+
f (x)	∩	פיתול	∪		∩	פיתול	∪

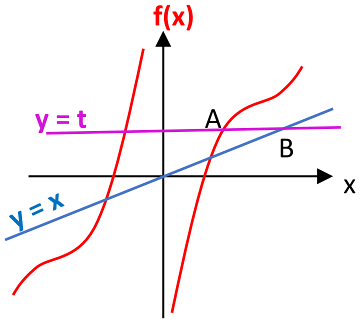
תחומי הקעירות כלפי מעלה: $-4.24 < x < 0$, $x > 4.24$,

4) **תחומי הקעירות כלפי מטה: $x < -4.24$, $0 < x < 4.24$**



ג. 1) $\frac{20}{x}-\frac{60}{x^3}+x=x \Rightarrow \frac{20}{x}-\frac{60}{x^3}=0 \Rightarrow 20x^2-60=0 \Rightarrow$

$x^2=3 \Rightarrow \mathbf{(\sqrt{3};\sqrt{3})}, \mathbf{(-\sqrt{3};-\sqrt{3})}$



2) נסמן: $A(x;\frac{20}{x}-\frac{60}{x^3}+x)$ ו- $B(t;t)$.

שתי הנקודות נמצאות על הישר $y = t$ לכן

$t=\frac{20}{x}-\frac{60}{x^3}+x$. אורך הקטע AB הוא:

$t-x=\frac{20}{x}-\frac{60}{x^3}+x-x=\frac{20}{x}-\frac{60}{x^3}$.

נסמן ב- $h(x)$ את הפונקציה המתארת את אורך הקטע AB המתקבל באופן זה ונקבל:

$h(x)=\frac{20}{x}-\frac{60}{x^3}$. המטרה: למצוא נקודת מקסימום של הפונקציה:

$$h'(x)=-\frac{20}{x^2}+\frac{180x^2}{x^6}=-\frac{20}{x^2}+\frac{180}{x^4}=\frac{-20x^2+180}{x^4}=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow$$

$x=3, (x>0)$

x	0	< x <	3	< x
h '(x)		+	0	-
h (x)		↗	Max	↘

עבור **x = 3** אורך הקטע AB מקסימלי. עבור $x = 3$ מקבלים: $t=\frac{20}{3}-\frac{60}{27}+3>2 \Leftarrow$

מתקיים: $t > 2$.

3) $f'(3)=\frac{3^4-20\cdot 3^2+180}{3^4}=1 \Leftarrow$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A שווה

לשיפוע הישר $y = x$ ולכן, **המשיק מקביל לישר.**