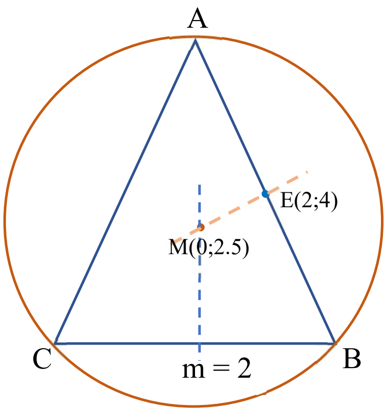
שאלון 582 - קיץ 2022   א.מ. ספרי מתמטיקה

על פי מיקוד חורף- קיץ תשפ"ב (כולל הקלות פברואר 2022) - פתרונות

מבחן מס' 1

פתרון שאלה מס' 1



א. 1) מרכז המעגל החוסם את המשולש נמצא במפגש האנכים האמצעיים לצלעות המשולש . לכן: ME אנך אמצעי לצלע AB .

$$m_{ME}=\frac{4-2.5}{2-0}=\frac{3}{4}\Rightarrow m_{AB}=-\frac{4}{3}\Rightarrow$$

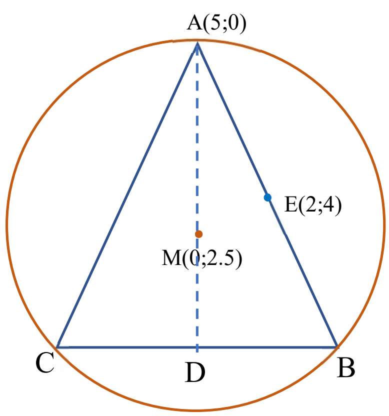
משוואת הישר AB : $y-4=-\frac{4}{3}(x-2)\Rightarrow \mathbf{y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}}$

2) במשולש שווה שוקיים , הגובה לבסיס הוא גם אנך אמצעי לבסיס, לכן הוא עובר דרך מרכז המעגל החוסם את המשולש . נסמן ב- AD את הגובה לבסיס. מקבלים :

$$m_{BC}=2\Rightarrow m_{AD}=-\frac{1}{2}\Rightarrow y-2.5=-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow \mathbf{y=-\frac{1}{2}x+2.5}$$

ב. 1) קודקוד A נמצא בנקודת החיתוך של הישרים AB ו- AD , לכן:

$$-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}=-\frac{1}{2}x+2.5\Rightarrow -8x+40=-3x+15\Rightarrow A(5;0)$$



חישוב אורך הרדיוס AM :

$$AM=\sqrt{(5-0)^2+(0-2.5)^2}=\sqrt{31.25}\Rightarrow$$

משוואת המעגל M : $\mathbf{x^2+(y-2.5)^2=31.25}$.

2) הנקודות B נמצאת על הישר AB במרחק $\sqrt{31.25}$ מן הנקודה M . לכן , נסמן : $B(b;-\frac{4}{3}b+\frac{20}{3})$.

נקבל: $\sqrt{b^2+\left(-\frac{4}{3}b+\frac{20}{3}-2.5\right)^2}=\sqrt{31.25}\Rightarrow b^2+\left(-\frac{4}{3}b+\frac{25}{6}\right)^2=31.25\Rightarrow$

$$\frac{25b^2}{9}-\frac{100b}{9}+\frac{625}{36}=31.25\Rightarrow b^2-4b-5=0\Rightarrow b=5\ ,\ b=-1$$

עבור $b=5$ מתקבלת הנקודה A(5;0) ועבור $b=-1$ מתקבלת הנקודה **B(-1;8)**.

אפשר למצוא כעת את משוואת הבסיס BC : $y-8=2(x+1)\Rightarrow y=2x+10$.

הנקודה D היא אמצע הבסיס BC והנה נקודת החיתוך של הישרים AD ו- BC . מקבלים:

$$-\frac{1}{2}x+2.5=2x+10\Rightarrow x=-3\Rightarrow y=4\Rightarrow D(-3;4)\Rightarrow$$

$$-3=\frac{-1+x_C}{2}\Rightarrow x_C=-5\ ,\ 4=\frac{8+y_C}{2}\Rightarrow y_C=0\Rightarrow \mathbf{C(-5;0)}$$

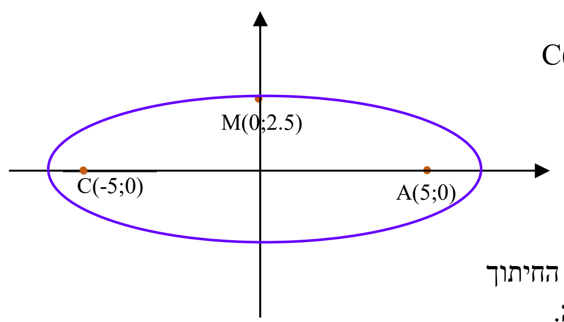
ג. 1) נסמן ב- P נקודה כללית על המקום הגיאומטרי המבוקש.

על פי התנאי הנתון מתקיים: $PA + PC = 2\sqrt{31.25}$

המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן
משתי נקודות קבועות הוא גודל קבוע , הוא אליפסה.
הנקודות הקבועות הן מוקדי האליפסה A(5;0) ו- C(-5;0)
לכן , מתקבלת אליפסה קנונית המקיימת:

$$b=\sqrt{31.25-25}=2.5 \Leftarrow a=\sqrt{31.25}\ \ ,\ c=5$$

מקבלים: $\mathbf{\frac{x^2}{31.25}+\frac{y^2}{6.25}=1}$



2) b = 2.5 לכן הנקודות M(0;2.5) ו- (0;-2.5) הן נקודות החיתוך
של האליפסה עם ציר ה- y ולכן M **נמצאת** על האליפסה.

.

ד. היקף המשולש PMC הוא : MP + MC + PC. P נמצאת על המעגל M
לכן MP ו- MC רדיוסים וסכומם $2\sqrt{31.25}$.

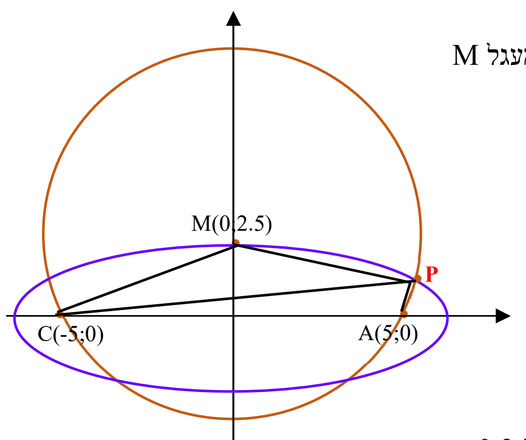
מקבלים : $p_{\Delta PMC}=2\sqrt{31.25}+PC$

היקף המשולש PAC הוא PC + PA + AC. P נמצאת על

האליפסה $\frac{x^2}{31.25}+\frac{y^2}{6.25}=1$ לכן

$$PA+PC=2a=2\sqrt{31.25}\ ,\ AC=10\Rightarrow$$

$p_{\Delta PAC}=10+2\sqrt{31.25}$.

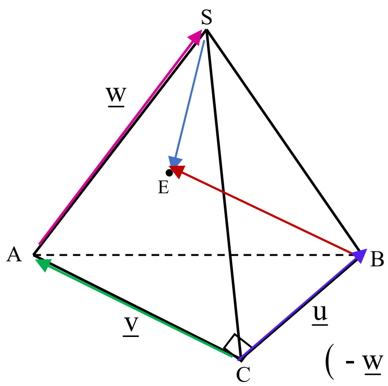


נתון: $p_{\Delta PMC}=p_{\Delta PAC}+0.346$

לכן: $0.346+10+2\sqrt{31.25}=2\sqrt{31.25}+PC\Rightarrow \mathbf{PC=10.346}$

$$\Rightarrow PA=2\sqrt{31.25}-10.346\ \Rightarrow \mathbf{PA=0.834}$$

פתרון שאלה מס' 2



א. $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}=-\underline{w}-\underline{v}$, $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\underline{w}-\underline{v}+\underline{u}$

נתון: $\underline{v}\perp\underline{u}\Rightarrow\underline{v}\cdot\underline{u}=0$, $|\overrightarrow{SC}|=|\underline{w}|\Rightarrow$

$$(-\underline{w}-\underline{v})\cdot(-\underline{w}-\underline{v})=\underline{w}\cdot\underline{w}\Rightarrow|\underline{w}|^2+2\cdot\underline{w}\cdot\underline{v}+|\underline{v}|^2=|\underline{w}|^2\Rightarrow$$

$$2\cdot\underline{w}\cdot\underline{v}+64=0\Rightarrow\mathbf{\underline{w}\cdot\underline{v}=-32}$$

$$|\overrightarrow{SB}|=|\underline{w}|\Rightarrow(-\underline{w}-\underline{v}+\underline{u})\cdot(-\underline{w}-\underline{v}+\underline{u})=\underline{w}\cdot\underline{w}\Rightarrow$$

$$(-\underline{w}-\underline{v}+\underline{u})\cdot(-\underline{w}-\underline{v}+\underline{u})=|\underline{w}|^2-32-\underline{w}\cdot\underline{u}-32+64-\underline{w}\cdot\underline{u}+36=|\underline{w}|^2$$

$$\Rightarrow2\underline{w}\cdot\underline{u}=36\Rightarrow\mathbf{\underline{w}\cdot\underline{u}=18}$$

ב. $\overrightarrow{SE}=\frac{1}{17}\left(16\cdot\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right)=\frac{1}{17}[16\cdot(-\underline{w}-\underline{v})+\underline{w}]=\frac{1}{17}(-16\underline{v}-15\underline{w})\Rightarrow$

$$\overrightarrow{SE}=-\frac{1}{17}(16\underline{v}+15\underline{w})$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SE}=-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}-\frac{16}{17}\underline{v}-\frac{15}{17}\underline{w}=-\underline{u}+\frac{1}{17}\underline{v}+\frac{2}{17}\underline{w}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{17}(-17\underline{u}+\underline{v}+2\underline{w})$$

$$\overrightarrow{SE}\perp\overrightarrow{BE}\Rightarrow-\frac{1}{17}(16\underline{v}+15\underline{w})\cdot\frac{1}{17}(-17\underline{u}+\underline{v}+2\underline{w})=0\Rightarrow$$

$$(16\underline{v}+15\underline{w})\cdot(-17\underline{u}+\underline{v}+2\underline{w})=0\Rightarrow$$

$$16\cdot64+32\cdot(-32)-255\cdot18+15\cdot(-32)+30|\underline{w}|^2=0\Rightarrow$$

$$30|\underline{w}|^2=5070\Rightarrow|\underline{w}|^2=169\Rightarrow\mathbf{|\underline{w}|=13}$$

ג. 1) $\overrightarrow{AS}=\underline{w}\Rightarrow(3-x_A;4-y_A;12-z_A)=(3;-4;12)\Rightarrow$

$$x_A=0,y_A=8,z_A=0\Rightarrow\mathbf{A(0;8;0)}$$

$$\overrightarrow{CA}=\underline{v}\Rightarrow(0-x_C;8-y_C;0-z_C)=(0;8;0)\Rightarrow$$

$$x_C=0,y_C=8,z_C=0\Rightarrow\mathbf{C(0;0;0)}$$

2) B נמצאת על החלק החיובי של ציר ה- x לכן נסמן $B(x;0;0)$, $x>0$.

נתון: $\overrightarrow{CB}=\underline{u}$, $|\underline{u}|=6$. מקבלים:

$\overrightarrow{CB}=(x;0;0)$, $\sqrt{x^2}=6$, $x>0\Rightarrow x=6\Rightarrow\mathbf{B(6;0;0)}$.

3) $\underline{v}$ ו $\underline{w}$ הם שני וקטורים בלתי תלויים במישור SAC. נמצא את הווקטור האנך למישור בעזרת מכפלה וקטורית של שני הווקטורים שתוצאתה וקטור המאונך לכל אחד מהם:

$$\begin{vmatrix}x&y&z\\3&-4&12\\0&8&0\end{vmatrix}\Rightarrow x(0-96)-y(0)+z(24-0)+d=0\Rightarrow$$

$-96x+24z+d=0 \Rightarrow 4x-z+D=0$. המישור עובר בנקודה $C(0;0;0)$ לכן $D=0$.
משוואת המישור SAC : $\mathbf{4x-z=0}$.

פתרון שאלה מס' 3

א. $z_{1,2}=\frac{-7+8i\pm\sqrt{(7-8i)^2-4(58-4i)}}{2}=\frac{-7+8i\pm\sqrt{49-112i-64-232+16i}}{2}=$

$\frac{-7+8i\pm\sqrt{-247-96i}}{2}$ נסמן: $\sqrt{-247-96i}=x+yi \Rightarrow$

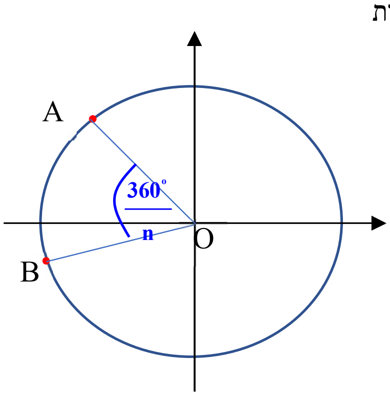
מקבלים: $-247-96i=x^2+2xyi-y^2 \Rightarrow x^2-y^2=-247,\ 2xy=-96 \Rightarrow$

$$y=-\frac{48}{x} \Rightarrow x^2-\left(-\frac{48}{x}\right)^2=-247 \Rightarrow x^2-\frac{2304}{x^2}=-247 \Rightarrow$$

$$x^4+247x^2-2304=0 \Rightarrow x^2=9, x^2=-256 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=-16 \Rightarrow$$

$$\sqrt{-247-96i}=\pm(3-16i) \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-7+8i\pm(3-16i)}{2} \Rightarrow \mathbf{z_1=-2-4i\ ,\ z_2=-5+12i}$$

ב. הפתרון שנמצא במישור של גאוס ברביע השני הוא $z=-5+12i$. מקבלים $z_A=-5+12i$.
נסמן ב- B את הקודקוד הסמוך לקודקוד A נגד כיוון השעון. הזווית המרכזית
$\sphericalangle AOB=\frac{360^\circ}{n}$. נחשב את רדיוס המעגל בו חסום המצולע המשוכלל:



$R=|z|=\sqrt{5^2+12^2}=13$. שטח המשולש AOB הוא
$\frac{1}{2}\cdot 13^2\cdot\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$: לכן $S_{\Delta AOB}=84.5\cdot\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \Leftarrow$

$$S(\text{מצולע})=84.5n\cdot\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)=80.3643n \Rightarrow$$

$$\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)=0.951 \Rightarrow \frac{360^\circ}{n}=72^\circ \Rightarrow \mathbf{n=5}$$

ג. המספר $z=-5+12i$ הוא פתרון של המשוואה $z^5=a+bi$ לכן $(-5+12i)^5=a+bi$.
נמצא את ההצגה הטריגונומטרית של המספר: $R=13$, $\tan\theta=-\frac{12}{5} \Rightarrow \theta=-67.38^\circ+180^\circ k$
$90^\circ<\theta<180^\circ \Rightarrow \theta=112.62^\circ$. מקבלים: $-5+12i=13cis(112.62^\circ)$. לכן:

$$\left[13cis(112.62^\circ)\right]^5=13^5cis(203.1^\circ) \Rightarrow \mathbf{z^5=13^5(\cos 203.1^\circ+i\cdot\sin 203.1^\circ)}$$

ד. 1) הפתרון הכללי של המשוואה $z^5=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ הוא מהצורה $z_k=\sqrt[5]{r}\cdot cis(\frac{\alpha}{5}+72^\circ k)$,
$0\le k\le 4$. פתרונות המשוואה:

$$w^5=-r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=r\cdot(-1)\cdot cis\alpha=r\cdot(cis180^\circ)\cdot cis\alpha=r\cdot cis(\alpha+180^\circ)$$

הוא $\Rightarrow R_1cis\beta=\sqrt[5]{r}\cdot cis(\frac{\alpha}{5}+72^\circ k) \Rightarrow R_1=\sqrt[5]{r}\ ,\ \beta=\frac{\alpha}{5}+72^\circ k$

$$w_k = \sqrt[5]{r}\cdot cis(\frac{\alpha+180^\circ}{5}+72^\circ k) = \sqrt[5]{r}\cdot cis(\frac{\alpha}{5}+36^\circ+72^\circ k) \Rightarrow$$

$$w_k = R_1 cis(\beta+36^\circ) \Rightarrow \boldsymbol{\gamma = \beta + 36^o}$$

2) הפתרון הכללי של המשוואה $z^5=13^5(cis203.1^o+360k^o)$ הוא

$z_k=13(cis\frac{203.1^o}{5}+72k^o) = 13(cis40.62^o+72k^o)$ $\Leftarrow$ $w_k=13(cis76.62^o+72k^o)$.

מתקבלים הפתרונות:

$$13cis(76.62^o), 13cis(148.62^o), 13cis(220.72^o), 13cis(292.72^o), 13cis(4.62^o)$$

הפתרון ברביע השני הוא : $\mathbf{13cis(148.62^o)}$

פתרון שאלה מס' 4

א. 1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל ערך של x.

$f'(x) = e^{x+a} + e^{-x-a} > 0$ $\Leftarrow$ הנגזרת חיובית לכל ערך של x,

לכן הפונקציה עולה לכל ערך של x.

2) $f(0) = e^a - e^{-a} = e^a - \frac{1}{e^a} = \frac{e^{2a}-1}{e^a}$ $\Leftarrow$

נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא: $\mathbf{(0;\frac{e^{2a}-1}{e^a})}$.

$f(x)=0 \Leftarrow e^{x+a} - e^{-x-a} = 0 \Leftarrow e^{x+a} = e^{-x-a} \Leftarrow$

$x+a = -x-a \Rightarrow x = -a$. נקודת החיתוך עם ציר ה- x היא: $\mathbf{(-a;0)}$.

3) הפונקציה $f(x)$ עולה לכל ערך של x וחותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=-a$

לכן, היא **שלילית בתחום $x<-a$ וחיובית בתחום $x>-a$.**

ב. 1) $f'(x) = e^{x+a} + e^{-x-a} \Rightarrow f''(x) = e^{x+a} - e^{-x-a} = f(x)$

2) תחום הקעירות כלפי מעלה תואם לתחום החיוביות של הפונקציה,

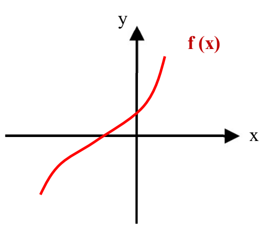
תחום הקעירות כלפי מטה תואם

לתחום השליליות של הפונקציה. לכן:

הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור $x>-a$

וקעורה כלפי מטה $\cap$ עבור $x<-a$.

(3



ג. 1) $g(x) = f(x-1) = e^{x-1+a} - e^{-(x-1)-a}$. גרף הפונקציה $g(x)$ עובר

בראשית הצירים לכן: $0 = e^{-1+a} - e^{1-a} \Rightarrow e^{-1+a} = e^{1-a} \Rightarrow -1+a = 1-a \Rightarrow \mathbf{a=1}$

2) $g(x) = e^{x-1+1} - e^{-x+1-1} \Rightarrow g(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow$

הפונקציה $g(x)$ אי-זוגית $\Rightarrow g(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -g(x)$

3) הפונקציה $g(x)$ אי-זוגית ולכן סימטרית ביחס לראשית, לכן הערך השלילי המתקבל עבור

$\int_{-t}^{0} g(x)dx$ הנו המספר הנגדי למספר המתקבל עבור $\int_{0}^{t} g(x)dx$. מסקנה: $\int_{-t}^{t} g(x)dx = \mathbf{0}$.

4) בתחום $-4 \le x \le 0$ ערכי האינטגרל $S(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$ צוברים ערכים שליליים , לכן ,

הערך המינימלי מתקבל עבור $x = 0$:

$$S(0) = \int_{-4}^{0} g(t)dt = \int_{-4}^{0} \left(e^t - e^{-t}\right)dt = \left[e^t + e^{-t}\right]_{-4}^{0} = 2 - 54.616 = \mathbf{-52.616}$$

הערך המקסימלי מתקבל עבור $x = 5$:

$$S(5) = \int_{-4}^{5} g(t)dt = \left[e^t + e^{-t}\right]_{-4}^{5} = 148.41 - 54.616 = \mathbf{93.8}$$

ד. 1) $h(x) = \dfrac{g(x)}{g'(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. $e^x + e^{-x}$ חיובי לכל x , לכן, הפונקציה מוגדרת **לכל x** .

2) תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(x)$ תואמים לאלה של $g(x)$. $g(x)$ היא הזזה של $f(x)$ ביחידה אחת ימינה , לכן: **תחום החיוביות : $x > 0$, תחום השליליות: $x < 0$.**

3) הפונקציה מוגדרת לכל x , לכן , אין אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x .

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y :

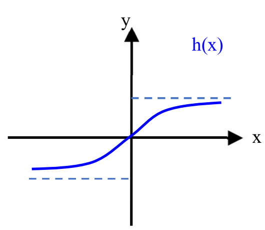
$$x \to \infty \Rightarrow h(x) \to \frac{e^x}{e^x} \to 1 \Rightarrow \mathbf{y = 1} \text{ אסימפטוטה} ,$$

$$x \to -\infty \Rightarrow h(x) \to \frac{-e^{-x}}{e^{-x}} \to -1 \Rightarrow \mathbf{y = -1}$$

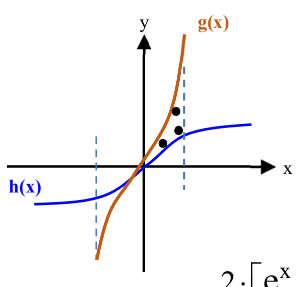
4) $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow h(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} =$

$-\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -h(x) \Rightarrow$ הפונקציה אי-זוגית

5)



6) הפונקציות $h(x)$ ו- $g(x)$ אי-זוגיות , לכן, השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות בתחום $0 \le x \le 4$ שווה לשטח המוגבל ביניהן בתחום $-4 \le x \le 0$. לכן:



$$S = 2 \cdot \int_{0}^{4} \left(e^x - e^{-x} - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)dx =$$

$$2 \cdot \left[e^x + e^{-x} - \ln(e^x + e^{-x})\right]_0^4 = 2 \cdot (50.616 - 1.31) = \mathbf{98.62}$$

פתרון שאלה מס' 5

א. 1) תחום הגדרה : $x > 0$ וגם $\ln x - 1 \neq 0 \Leftarrow \ln x \neq 1 \Leftarrow x \neq e$. מקבלים:

$\mathbf{0 < x < e \, , x > e}$

2) אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x : נקודה "ריקה" $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to 0 \Rightarrow (0;0)$

אסימפטוטה $x \to e \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow \mathbf{x = e}$

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y :

אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow$

3) $$f'(x) = \frac{(\ln x - 1)^2 - x \cdot 2(\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^4} = \frac{(\ln x - 1)^2 - 2(\ln x - 1)}{(\ln x - 1)^4} =$$

$$\frac{(\ln x - 1)(\ln x - 1 - 2)}{(\ln x - 1)^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln x - 1)(\ln x - 3)}{(\ln x - 1)^4} = 0 \Rightarrow$$

$$(\ln x - 1)(\ln x - 3) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 \neq 0 \Rightarrow \ln x - 3 = 0 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$$

x	0	$< x <$	e	$< x <$	e^3	$< x$
$f'(x)$		+		-	0	+
$f(x)$		↗		↘	min	↗

מקבלים: **תחומי עלייה:** $\mathbf{0 < x < e \, , x > e^3}$, **תחום ירידה:** $\mathbf{e < x < e^3}$

נקודת מינימום $f(e^3) = \frac{e^3}{4} \Rightarrow \mathbf{(e^3; \frac{e^3}{4})}$

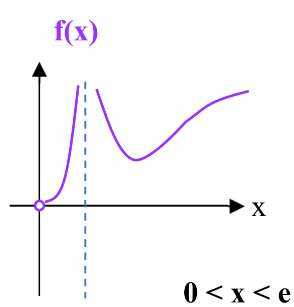
ב. 1) על פי תחומי העלייה והירידה של $f'(x)$:

x	0	$< x <$	e	$< x <$	e^4	$< x$
$f'(x)$		↗		↗	Max	↘
$f''(x)$		+		+	0	-
$f(x)$		∪		∪	פיתול	∩

תחומי הקעירות כלפי מעלה: $\mathbf{0 < x < e \, , e < x < e^4}$

תחום הקעירות כלפי מטה: $\mathbf{x > e^4}$

(2



ג. (1 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. היות ו- $f(x) \neq 0$ בכל תחום ההגדרה של $f(x)$,

הרי שתחום ההגדרה של $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של $f(x)$: $\mathbf{0 < x < e \, , x > e}$

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x :

אסימפטוטה $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to 0 \Rightarrow g(x) \to \infty \Rightarrow \mathbf{x = 0}$

"נקודה ריקה" $x \to e \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow g(x) \to 0 \Rightarrow (e;0)$

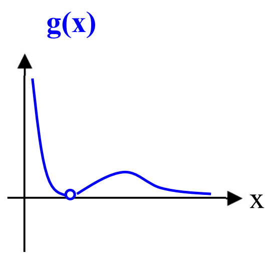
אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y :

אסימפטוטה $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow g(x) \to 0 \Rightarrow \mathbf{y = 0}$

2) $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2} \Rightarrow$

$g'(x) = 0$ עבור $x = e^3$ וסימני הנגזרת $g'(x)$ הפוכים לסימני $f'(x)$.

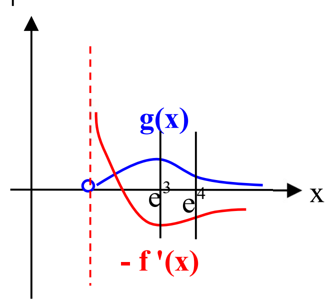
מקבלים:



תחום העלייה: $\mathbf{e < x < e^3}$, **תחומי ירידה:** $\mathbf{0 < x < e\, ,\, x > e^3}$

3) הנקודה $\mathbf{(e^3; \frac{4}{e^3})}$ היא **נקודת מקסימום** של הפונקציה $g(x)$

ד. גרף הפונקציה $h(x) = -f'(x)$ הנו שיקוף של גרף הפונקציה $f'(x)$ ביחס לציר ה- x. נסרטט את הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ בתחום $x > e$ ונחשב את השטח המבוקש:



$$S = \int_{e^3}^{e^4} \left(g(x) + f'(x)\right) dx = \int_{e^3}^{e^4} \left(\frac{(\ln x - 1)^2}{x} + f'(x)\right) dx =$$

$$\int_{e^3}^{e^4} \left(\frac{(\ln x)^2 - 2\ln x + 1}{x} + f'(x)\right) dx =$$

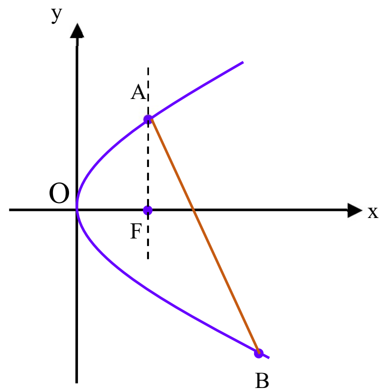
$$\int_{e^3}^{e^4} \left(\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2 - \frac{1}{x}\cdot 2\ln x + \frac{1}{x} + f'(x)\right) dx = \left[\frac{(\ln x)^3}{3} - \frac{2(\ln x)^2}{2} + \ln x + f(x)\right]_{e^3}^{e^4} =$$

$$\left[\frac{(\ln x)^3}{3} - \frac{2(\ln x)^2}{2} + \ln x + f(x)\right]_{e^3}^{e^4} =$$

$$\left(\frac{4^3}{3} - 4^2 + 4 + f(e^4)\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3 + f(e^3)\right) = \mathbf{7.38}$$

מבחן מס' 2

פתרון שאלה מס' 1



א. 1) שיעורי מוקד הפרבולה : $F(\frac{p}{2};0)$ לכן הנקודה A

נמצאת על הישר $x = \frac{p}{2}$. נוכל לסמן :

$x_A = \frac{p}{2} \Rightarrow (y_A)^2 = 2 \cdot p \cdot \frac{p}{2} = p^2$. הנקודה A

נמצאת ברביע הראשון , לכן מקבלים: $A(\frac{p}{2};p)$.

שיפוע המיתר AB הוא 2 – לכן נוכל להביע את משוואת הישר AB באמצעות p :

$$y - p = -2(x - \frac{p}{2}) \Rightarrow y = -2x + 2p \Rightarrow 2x + y - 2p = 0$$

מרחק הישר מקודקוד הפרבולה (0;0) הוא $2\sqrt{5}$, לכן:

$$2\sqrt{5} = \frac{|2\cdot 0 + 0 - 2p|}{\sqrt{2^2+1^2}} \Rightarrow 10 = |2p| \Rightarrow 2p = 10 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow$$

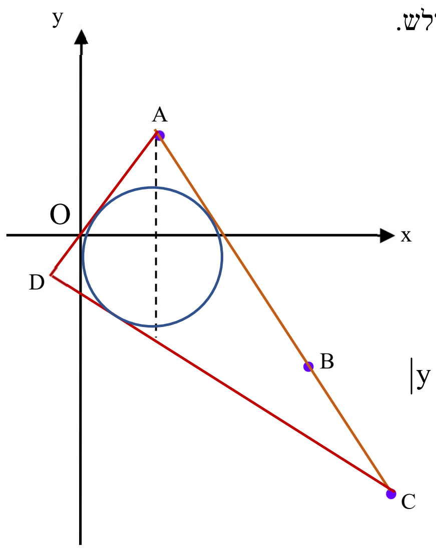
משוואת הפרבולה: $\mathbf{y^2 = 10x}$.

2) מקבלים : $A(2.5;5)$. משוואת הישר AB : $y = -2x + 10$.

נקודות החיתוך של הישר עם הפרבולה:

$$(-2x+10)^2 = 10x \Rightarrow 4x^2 - 50x + 100 = 0 \Rightarrow x = 10, x = 2.5$$

$$x_A = 2.5 \Rightarrow x_B = 10 \Rightarrow (y_B)^2 = 100, y_B < 0 \Rightarrow y_B = -10 \Rightarrow \mathbf{B(10;-10)}$$



ב. 1) מרכז המעגל החסום במשולש נמצא במרחקים שווים מצלעות במשולש.

משוואת הצלע AC : $2x + y - 10 = 0$, משוואת הישר AD :

$$m_{AD} = \frac{5-0}{2.5-0} = 2 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow y - 2x = 0$$

נסמן ב- $(x;y)$ נקודה כללית על הישר המבוקש. מקבלים:

$$\frac{|y-2x|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x+y-10|}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$|y-2x| = |2x+y-10| \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = 2.5$$

או $|y-2x| = |2x+y-10| \Rightarrow -y+2x = 2x+y-10 \Rightarrow y = 5$

על פי הנתון , מרכז המעגל החסום נמצא מתחת לנקודה A

לכן , הוא נמצא על הישר $\mathbf{x = 2.5}$.

2) הנקודה C נמצאת על הישר $y = -14$ וגם על הישר

$y = -2x + 10$ לכן $x = 12$ ומקבלים : $C(12;-14)$.

והנקודה D נמצאת על הישר $x = -3.2$ וגם על הישר $y = 2x$

לכן מקבלים $D(-3.2;-6.4)$. משוואת הישר DC : $m_{DC} = \frac{-6.4+14}{-3.2-12} = \frac{7.6}{-15.2} = -\frac{1}{2}$

$. y+14=-\frac{1}{2}(x-12)\Rightarrow x+2y+16=0$

נסמן את מרכז המעגל החסום במשולש ACD : $M(2.5;b)$ ונקבל:

$$\frac{|b-5|}{\sqrt{5}}=\frac{|2.5+2b+16|}{\sqrt{5}}\Rightarrow|b-5|=|2b+18.5|\Rightarrow b-5=2b+18.5\Rightarrow b=-23.5$$

או $b-5=-2b-18.5\Rightarrow 3b=-13.5\Rightarrow b=-4.5$

מרכז המעגל נמצא מעל לישר $y=-14$ לכן מקבלים: $M(2.5;-4.5)$.

חישוב רדיוס המעגל: $R=\frac{|-4.5-2\cdot2.5|}{\sqrt{5}}=\frac{9.5}{\sqrt{5}}$. משוואת המעגל M :

$$\mathbf{(x-2.5)^2+(y+4.5)^2=18.05}$$

(3 $m_{AD}=2,\ m_{DC}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sphericalangle ADC=90^\circ\Rightarrow$

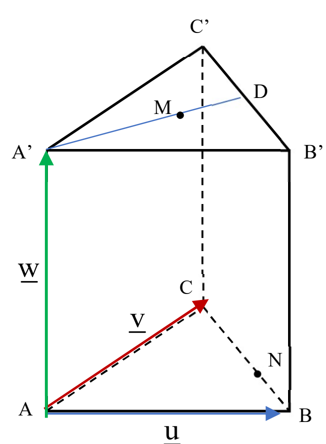
מרכז המעגל החוסם את המשולש הוא אמצע היתר AC . נסמן ב- N את מרכז המעגל ונקבל:

$$x_N=\frac{2.5+12}{2}=7.25,\ y_N=\frac{5-14}{2}=-4.5\Rightarrow N(7.25;-4.5)$$

$. R^2=(2.5-7.25)^2+(5+4.5)^2=112\frac{13}{16}$

מקבלים: $\mathbf{(x-7.25)^2+(y+4.5)^2=112\frac{13}{16}}$

פתרון שאלה מס' 2



א. 1) M מפגש התיכונים במשולש A'B'C' . נסמן ב- D את אמצע המקצוע B'C'. $\overrightarrow{A'M}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'D}$, $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.

מקבלים:

$$\overrightarrow{A'M}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'D}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{A'B'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'})=$$

$$=\frac{2}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}(-\underline{u}+\underline{v})\Rightarrow\mathbf{\overrightarrow{A'M}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{A'N}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=-\underline{w}+\underline{u}+\frac{2}{5}(-\underline{u}+\underline{v})\Rightarrow$$

$$\mathbf{\overrightarrow{A'N}=\frac{3}{5}\underline{u}+\frac{2}{5}\underline{v}-\underline{w}}$$

(2 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=\underline{u}+\frac{2}{5}(-\underline{u}+\underline{v})=\frac{3}{5}\underline{u}+\frac{2}{5}\underline{v}$

$\frac{3}{5}\underline{u}+\frac{2}{5}\underline{v}\neq\alpha(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v})\Leftarrow$ $\overrightarrow{A'M}$ את $\overrightarrow{AN}$ נמצאים במישורים מקבילים

ואינם בעלי אותו כיוון, לכן הם **מצטלבים**.

3) על פי הנתונים: $\underline{u}\cdot\underline{u}=|\underline{u}|^2=140$, $\underline{v}\cdot\underline{v}=|\underline{v}|^2=11$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cos\sphericalangle BAC=34$.

המנסרה ישרה לכן $\underline{w}\perp\underline{u}$, $\underline{w}\perp\underline{v}$ $\Leftarrow$ $\underline{w}\cdot\underline{u}=\underline{w}\cdot\underline{v}=0$. מקבלים :

$$\cos\sphericalangle MA'N=\frac{\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{A'N}}{|\overrightarrow{A'M}|\cdot|\overrightarrow{A'N}|}\,.$$

$$|\overrightarrow{A'M}|=\sqrt{\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v})\cdot\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v})}=\frac{1}{3}\sqrt{140+2\cdot34+11}=\frac{1}{3}\sqrt{219}$$

$$|\overrightarrow{A'N}|=\sqrt{\frac{1}{5}(3\underline{u}+2\underline{v}-5\underline{w})\cdot\frac{1}{5}(3\underline{u}+2\underline{v}-5\underline{w})}=$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{9\cdot140+6\cdot34+6\cdot34+4\cdot11+25\cdot37.5}=\frac{1}{5}\sqrt{2649.5}$$. מקבלים:

$$\cos\sphericalangle MA'N=\frac{\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v})\cdot\frac{1}{5}(3\underline{u}+2\underline{v}-5\underline{w})}{\frac{1}{15}\sqrt{219}\cdot\sqrt{2649.5}}=\frac{3\cdot140+2\cdot34+3\cdot34+2\cdot11}{\sqrt{219}\cdot\sqrt{2649.5}}=$$

$$0.8034\Rightarrow \boldsymbol{\sphericalangle MA'N=36.54^o}$$

ב. 1) הנקודה A היא נקודת החיתוך של הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 . נקודה כללית על הישר ℓ_1 היא מהצורה (-1 + t; - t;4 +3t) ונקודה כללית על הישר ℓ_2 היא מהצורה (-2 + r; -7 + 3r; 17 – 5r).

מקבלים : $-1+t=-2+r$; $-t=-7+3r$; $4+3t=17-5r$

לכן: קיים פתרון יחיד עבור $r=2$, $t=1$. מקבלים **A(0;-1;7)**

2) $\underline{w}$ מאונך לישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 לכן $(2.5;m;k)(1;-1;3)=0$ וגם $(2.5;m;k)(1;3;-5)=0$

מקבלים **k = -2.5 , m = -5**.

3) קיבלנו $\underline{w}=(2.5;-5;-2.5)$.

$$\overrightarrow{BB'}=\underline{w}\Rightarrow(4.5-x_B;0-y_B;-5.5-z_B)=(2.5;-5;-2.5)\Rightarrow B(2;5;-3)$$

$$\overrightarrow{CC'}=\underline{w}\Rightarrow(1.5-x_C;-5-y_C;1.5-z_C)=(2.5;-5;-2.5)\Rightarrow C(-1;0;4)$$

$$\underline{u}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow \mathbf{\underline{u}=(2;6;-10)}\ ,\ \underline{u}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\mathbf{\underline{v}=(-1;1;-3)}$$

4) $$\overrightarrow{A'M}=\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v})=\frac{1}{3}\left[(2;6;-10)+(-1;1;-3)\right]=\frac{1}{3}(1;7;-13)$$

$$\overrightarrow{A'N}=\frac{1}{5}(3\underline{u}+2\underline{v}-5\underline{w})=\frac{1}{5}\left[3(2;6;-10)+2(-1;1;-3)-5(2.5;-5;-2.5)\right]=$$

$$\frac{1}{5}(-8.5;45;-23.5)=\frac{1}{10}(-17;90;-47)$$

נמצא את שיעורי הנקודה 'A :

$\overline{AA'} = \underline{w} \Rightarrow (x_{A'} - 0; y_{A'} + 1; z_{A'} - 7) = (2.5;-5;-2.5) \Rightarrow A'(2.5;-6;4.5)$

ההצגה הפרמטרית של הישר A'M : $\ell : \underline{x} = \mathbf{(2.5;-6;4.5) + s(1;7;-13)}$

הצגה הפרמטרית של הישר A'N : $\ell : \underline{\mathbf{x}} = \mathbf{(2.5;-6;4.5) + q(-17;90;-47)}$

5) $\cos\alpha = \dfrac{|(-17;90;-47)\cdot(1;7;-13)|}{\sqrt{17^2+90^2+47^2}\cdot\sqrt{1^2+7^2+13^2}} = \dfrac{1224}{\sqrt{10598}\cdot\sqrt{219}} = 0.8034 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 36.54^o}$

פתרון שאלה מס' 3

א. $|z+2-4i| = \sqrt{20}$ נסמן : $z = x + yi$ ונקבל: $|x+yi+2-4i| = \sqrt{20} \Leftarrow$

$|(x+2)+(y-4)i| = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow \mathbf{(x+2)^2+(y-4)^2 = 20}$

נראה שהמעגל עובר דרך ראשית הצירים : $(0+2)^2+(0-4)^2 = 4+16 = 20$

$|z-5+10i| = \sqrt{125} \Rightarrow |x+yi-5+10i| = \sqrt{125} \Rightarrow |(x-5)+(y+10)i| = \sqrt{125} \Rightarrow$

$\mathbf{(x-5)^2+(y+10)^2 = 125}$. נציב $x = 0 , y = 0$ ונקבל:

$125 = 25 + 100 = (0-5)^2 + (0+10)^2 \Leftarrow$ המעגל עובר דרך ראשית הצירים.

ב. 1) מרכז המעגל הראשון הוא בנקודה (-2;4) .

המספר המתאים במישור של גאוס הוא $z = -2+4i$, $|z| = \sqrt{20}$.

מרכז המעגל השני הוא בנקודה (5;-10) .

המספר המתאים במישור של גאוס הוא $z = 5-10i$, $|z| = \sqrt{125}$.

לכן: $z_1 = -2+4i$ ו- $z_2 = 5-10i \Leftarrow \bar{z}_1 = -2-4i , \bar{z}_2 = 5+10i$.

z_1 ו- $\bar{z}_1$ נמצאים על הישר $x = -2$, z_2 ו- $\bar{z}_2$ נמצאים על הישר $x = 5$, כלומר על ישרים מקבילים. נסמן ב- A , B , C ו- D את הנקודות במישור של גאוס המייצגות את המספרים z_1 , $\bar{z}_1$, z_2 ו- $\bar{z}_2$ בהתאמה. מקבלים: $AB \parallel CD$ ו- $AB = 8$, $CD = 20$

$\Leftarrow CD \neq AB$ לכן המרובע ABCD טרפז.

נמצא את הארגומנט α של z_1 :

$\tan\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -63.43^\circ + 180^\circ k , 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha = 116.57^\circ \Rightarrow$

$z_A = \sqrt{20}\text{cis}(116.57^\circ)$

נמצא את הארגומנט β של $\bar{z}_1$:

$\tan\beta = 2 \Rightarrow \beta = 63.43^\circ + 180^\circ k , 180^\circ < \beta < 270^\circ \Rightarrow \beta = 243.43^\circ \Rightarrow$

$z_B = \sqrt{20}\text{cis}(243.43^\circ)$

נמצא את הארגומנט γ של z_2 :

$\tan\gamma = -2 \Rightarrow \gamma = -63.43^\circ + 180^\circ k , 270^\circ < \gamma < 360^\circ \Rightarrow \gamma = 296.57^\circ \Rightarrow$

$$z_C = \sqrt{125}\text{cis}\left(296.57^\circ\right)$$

נמצא את הארגומנט θ של $\overline{z}_2$:

$$\tan\theta = 2 \Rightarrow \theta = 63.43^\circ + 180^\circ k \text{ , } 0^\circ < \theta < 90^\circ \Rightarrow \theta = 63.43^\circ \Rightarrow$$

$$z_D = \sqrt{125}\text{cis}\left(63.43^\circ\right)$$

מקבלים: $\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOB = 180^\circ$ ⇐ AC ו- DB נמצאים על אותם ישרים העוברים דרך ראשית הצירים. הזווית החדה בין AC ו- BD היא $116.57^\circ - 63.43^\circ = \mathbf{53.14^o}$

3) $iw^4 = z_1 \cdot z_2$ ⇐ $iw^4 = \sqrt{20}\text{cis}\left(116.57^\circ\right)\cdot\sqrt{125}\text{cis}\left(296.57^\circ\right)$ ⇐

$$iw^4 = 50\text{cis}\left(53.14^\circ\right). \ i = \text{cis}\left(90^\circ\right) \Rightarrow$$

$$w^4 = \frac{50\text{cis}\left(53.14^\circ\right)}{\text{cis}\left(90^\circ\right)} \Rightarrow w^4 = 50\text{cis}\left(-36.86^\circ + 360^\circ k\right) \Rightarrow$$

$$w_k = \sqrt[4]{50}\text{cis}\left(\frac{-36.86^\circ + 360^\circ k}{4}\right) = \sqrt[4]{50}\text{cis}(-9.215^\circ + 90^\circ k)$$

מתקבלים הפתרונות:

$$\mathbf{\sqrt[4]{50}cis(-9.215^o)\,,\,\sqrt[4]{50}cis(80.785^o)\,,\,\sqrt[4]{50}cis(170.785^o)\,,\,\sqrt[4]{50}cis(260.785^o)}$$

פתרון שאלה מס' 4

א. 1) תחומי ההגדרה:

f(x): $(x-3)^2 > 0$ ⇐ $x \neq 3$ ⇐ $\mathbf{x < 3 \ , \ x > 3}$

g(x): $x - 3 > 0$ ⇐ $\mathbf{x > 3}$

h(x): $(2x-6)^2 > 0$ ⇐ $x \neq 3$ ⇐ $\mathbf{x < 3 \ , \ x > 3}$

2) אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x:

f(x): $x \to 3$ ⇐ $f(x) \to -\infty$ ⇐ $\mathbf{x = 3}$ אסימפטוטה

g(x): $x \to 3$ ⇐ $g(x) \to -\infty$ ⇐ $\mathbf{x = 3}$ אסימפטוטה

h(x): $x \to 3$ ⇐ $h(x) \to -\infty$ ⇐ $\mathbf{x = 3}$ אסימפטוטה, לכן ,

הישר $x = 3$ אסימפטוטה אנכית לכל אחת מן הפונקציות

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y:

f(x): $x \to \pm\infty$ ⇐ $f(x) \to \infty$ ⇐ **אין** אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y .

g(x): $x \to \infty$ ⇐ $g(x) \to \infty$ ⇐ **אין** אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y .

h(x): $x \to \pm\infty$ ⇐ $h(x) \to \infty$ ⇐ **אין** אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y .

3) f(x): $f(x) = x^2 + \ln(x-3)^2$ ⇐ $f'(x) = 2x + \frac{2(x-3)}{(x-3)^2}$ ⇐ $f'(x) = 2x + \frac{2}{x-3}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{2}{x-3} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2.618 \text{ , } x = 0.382$$

x	< x	0.382	< x <	2.618	< x <	3	< x

f '(x)	-	0	+	0	-		+
f(x)	↘	min	↗	Max	↘		↗

מקבלים: $f(0.382) = 2.07$, $f(2.618) = 4.929$.

(0.382;2.07) נקודת מינימום , (2.618;4.929) נקודת מקסימום,

תחומי העלייה: $x > 3$, $0.382 < x < 2.618$; תחומי ירידה: $2.618 < x < 3$, $x < 0.382$

$g(x)$: $x = 0.382, x = 2.618 \Leftarrow g'(x) = 2x + \frac{2}{x-3} = 0 \Leftarrow g(x) = x^2 + 2\ln(x-3)$

על פי תחום ההגדרה של הפונקציה $x > 3$, לכן אין פתרונות בתחום ההגדרה , כלומר,

לפונקציה $g(x)$ **אין נקודות קיצון.**

בתחום $x > 3$ מתקיים: $g'(x) > 0$ לכן הפונקציה $g(x)$ **עולה בכל תחום הגדרתה**

$h(x)$: $h(x) = x^2 + \ln(2x-6)^2 \Rightarrow h'(x) = 2x + \frac{2(2x-6)\cdot 2}{(2x-6)^2} = 2x + \frac{4}{2x-6} \Rightarrow$

$$h'(x) = 2x + \frac{2}{x-3} = 0 \Rightarrow x = 0.382, x = 2.618 \Rightarrow$$

$h(0.382) = 3.457$, $f(2.618) = 6.316$.

מתקבלים אותם תחומי עלייה וירידה כמו של $f(x)$. לכן:

מקבלים:

(0.382;3.457) נקודת מינימום , (2.618;6.316) נקודת מקסימום,

תחומי העלייה: $x > 3$, $0.382 < x < 2.618$; תחומי ירידה: $2.618 < x < 3$, $x < 0.382$

4) $f(x)$: $f'(x) = 2x + \frac{2}{x-3} \Rightarrow f''(x) = 2 - \frac{2}{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow 2(x-3)^2 - 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 1 \Rightarrow x = 4, x = 2$$

x	< x	2	< x <	3	< x <	4	< x
f "(x)	+	0	-		-		+
f(x)	∪	פיתול	∩		∩	פיתול	∪

מקבלים: $f(2) = 4$, $f(4) = 16$. **נקודות פיתול: (2;4) , (4;16) , תחומי קעירות כלפי מעלה:**
$x > 4$, $x < 2$, תחומי קעירות כלפי מטה: $3 < x < 4$, $2 < x < 3$

$g(x)$: בתחום $x > 3$ מתקיים: $g'(x) = f'(x) \Rightarrow g''(x) = f''(x)$

מקבלים: **נקודת פיתול: (4;16) , תחום הקעירות כלפי מעלה: $x > 4$,**

תחום הקעירות כלפי מטה: $3 < x < 4$

$h(x)$: : $h'(x) = f'(x) \Rightarrow h''(x) = f''(x)$ לכן: **נקודות פיתול: (4;17.386) , (2;5.386),**

תחומי קעירות כלפי מעלה: $x > 4$, $x < 2$, תחומי קעירות כלפי מטה:

$$\mathbf{2 < x < 3\ ,\ 3 < x < 4}$$

ב. על פי תחומי ההגדרה: גרף **III מתאים לפונקציה g(x)** .
גרף I מתאים להזזה כלפי מעלה של גרף II . על שיעורי נקודות הקיצון ונקודות הפיתול, **גרף I מתאים לפונקציה h(x) וגרף II מתאים לפונקציה f(x)** .

ג. 1) $f(x) = x^2 + \ln(x-3)^2$ ועל פי חוקי הלוגריתמים , בתחום בו $x > 3$ מקבלים:

$$f(x) = x^2 + 2\ln(x-3) = g(x)$$

2) $$h(x) = x^2 + \ln(2x-6)^2 = x^2 + \ln\left[2(x-3)\right]^2 = x^2 + \ln\left[4(x-3)^2\right] =$$

$$= x^2 + \ln 4 + \ln(x-3)^2 \Rightarrow h(x) = f(x) + \ln 4 \Rightarrow \mathbf{k = ln4}$$

פתרון שאלה מס' 5

א. 1) הפונקציה f(x) מוגדרת לכל x .

$$f(x) = 1 + x\cdot e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + x\cdot e^x = e^x(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	< x	-1	< x
f '(x)	-	0	+
f(x)	↘	min	↗

$f(-1) = 1 - \frac{1}{e} = 0.632 \Rightarrow \mathbf{(-1;0.632)}$ **נקודת מינימום**

2) הערך המינימלי של הפונקציה הוא 0.632 , לכן , $f(x) > 0$ לכל x .

ב. 1) תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x) = \dfrac{e^x + x\cdot e^x}{1 + x\cdot e^x}$: $1 + x\cdot e^x \neq 0$. על פי סעיף א-2) מתקיים

$1 + x\cdot e^x > 0$ לכל x , לכן , g(x) מוגדרת לכל ערך של x .

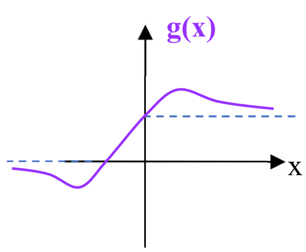
2) $g(0) = 1 \Rightarrow \mathbf{(0;1)}$. $g(x) = 0 \Rightarrow e^x + x\cdot e^x = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \mathbf{(-1;0)}$

3) g(x) מוגדרת לכל ערך של x לכן אין אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x .
אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y :

$$x \to \infty \Rightarrow g(x) \to \frac{e^x + x\cdot e^x}{x\cdot e^x} = \frac{e^x}{x\cdot e^x} + \frac{x\cdot e^x}{x\cdot e^x} = \frac{1}{x} + 1 \to 1 \Rightarrow \mathbf{y = 1}$$ אסימפטוטה

$$x \to -\infty \Rightarrow e^x \to 0 \Rightarrow g(x) \to \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \mathbf{y = 0}$$ אסימפטוטה

4) $g(-1.841) = -0.188$, $g(1.146) = 1.466$. לכן:
(-1.841;-0.188) נקודת מינימום ,
(1.146;1.466) נקודת מקסימום. מתקבל הגרף:



ג. 1)

x	< x	-1	< x
h '(x)	-	0	+

h(x)	↘	min	↗

תחום העלייה: $x > -1$, תחום הירידה: $x < -1$

(2 $h(x) = \int g(x)dx = \int \frac{e^x + x\cdot e^x}{1 + x\cdot e^x}dx = \ln\left|1 + x\cdot e^x\right| + c$

$$1 + x\cdot e^x > 0 \Rightarrow h(x) = \ln\left(1 + x\cdot e^x\right) + c$$

$$0 = \ln(1) + c \Rightarrow c \Rightarrow \mathbf{h(x) = \ln(1 + x\cdot e^x)}$$

(3 $1 + x\cdot e^x > 0$ לכן $h(x)$ מוגדרת לכל x ואין אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x .

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y : אסימפטוטה $\mathbf{y = 0}$ $x \to -\infty \Rightarrow h(x) \to \ln(1) = 0 \Rightarrow$

אין אסימפטוטה $x \to \infty \Rightarrow h(x) \to \infty \Rightarrow$

(4