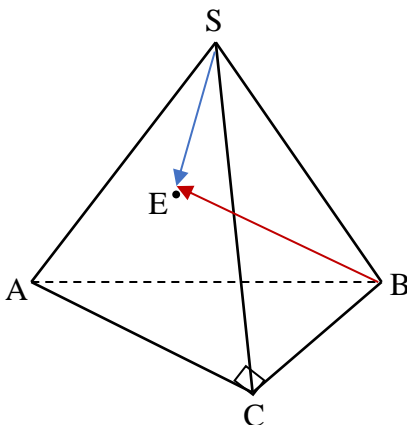


מבחן מס' 1

משך הבחינה: שעתיים ורבע

פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים

1. משולש ABC הנו משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$). שיפוע הישר עליו נמצאת הצלע BC הוא 2. הנקודה $M(0;2.5)$ היא מרכז המעגל החוסם את המשולש. הנקודה $E(2;4)$ היא אמצע הצלע AB.
- א. מצא את משוואת הישר עליו נמצאת הצלע AB.
 ב. מצא את משוואת הישר עליו נמצאת הצלע BC.
 ג. מצא את משוואת הישר עליו נמצאת הצלע AC.
 ד. מצא את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור שסכום מרחקיהן מן הקודקודים A ו-C שווה לקוטר המעגל החוסם את המשולש ABC.
 ה. האם הנקודה M נמצאת על המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ג-1? נמק.
 ו. הנקודה P היא אחת מנקודות החיתוך של המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ג-1 עם המעגל החוסם את המשולש ABC. היקף המשולש PMC גדול ב-0.346 מהיקף המשולש PAC. חשב את אורכי הקטעים PC ו-PA.



2. $SABC$ פירמידה משולשת ישרה שבסיסה משולש ישר-זווית ($\sphericalangle C = 90^\circ$). נתון: $\overrightarrow{CA} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.
- א. הראה כי $\underline{u} \cdot \underline{w} = 18$ ו- $\underline{w} \cdot \underline{v} = -32$.
 ב. הנקודה E נמצאת על הפאה SAC. נתון: $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{SE}$. הראה כי $\overrightarrow{SE} = \frac{1}{17}(16 \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA})$.
 ג. נתון: $S(3;4;12)$, $\underline{v} = (0;8;0)$, $\underline{w} = (3;-4;12)$.
1. מצא את שיעורי הקודקודים A ו-C.
 2. הנקודה B נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x. מצא את שיעורי קודקוד B.
 3. מצא את משוואת המישור SAC.

3. א. פתור את המשוואה: $z^2 + (7 - 8i)z + 58 - 4i = 0$.
- ב. אחד הפתרונות של המשוואה נמצא ברביע השני. מספר זה מיוצג במישור של גאוס על ידי הנקודה A הנמצאת על מעגל שמרכזו בראשית הצירים. הנקודה A היא הנה אחד הקודקודים של מצולע משוכלל בעל n צלעות החסום באותו מעגל. שטח המצולע הוא $80.3643n$. מצא את n.
- הצב $n = 5$ וענה על הסעיפים הבאים:
- ג. רשום משוואה מהצורה $z^n = r(\cos\alpha + isin\alpha)$ שפתרונותיה הם קודקודי המצולע המשוכלל החסום באותו מעגל.
- ד. z_k הוא אחד הפתרונות של המשוואה $z^n = r(\cos\alpha + isin\alpha)$, $0 \leq k \leq n - 1$.
- w_k הוא אחד הפתרונות של המשוואה $w^n = -r(\cos\alpha + isin\alpha)$.
- (1) נסמן: $z_k = R_1 cis\beta$ ו- $w_k = R_2 cis\gamma$. בלי לפתור את המשוואה $w^n = -r(\cos\alpha + isin\alpha)$, הסבר מדוע מתקיים $\gamma = \beta + 36^\circ$.
- (2) מצא את הפתרון של המשוואה $w^n = -r(\cos\alpha + isin\alpha)$ הנמצא ברביע השני.

פרק שני- פונקציה מעריכית ופונקציה לוגריתמית

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x+a} - e^{-x-a}$ ($a > 0$).
- א. הראה שהפונקציה עולה לכל ערך של x.
- (2) בטא בעזרת a את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- (3) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
- ב. (1) הראה כי $f''(x) = f(x)$.
- (2) היעזר בסעיפים הקודמים ומצא את נקודת הפיתול של הפונקציה, את תחומי הקעירות כלפי מעלה \cup ואת תחומי הקעירות כלפי מטה \cap של הפונקציה.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x - 1)$. גרף הפונקציה $g(x)$ עובר דרך ראשית הצירים.
- (1) מצא את הערך של a.
- (2) הראה שהפונקציה $g(x)$ אי-זוגית.
- (3) חשב את ערך האינטגרל $\int_{-t}^t g(x) dx$, $t > 0$.
- (4) נתונה הפונקציה $S(x) = \int_{-4}^x g(t) dt$ בתחום $-4 \leq x \leq 5$.
- מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $S(x)$.
- ד. נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.
- (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.
- (2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(x)$.
- (3) מצא אסימפטוטות לגרף הפונקציה $h(x)$ המאונכות לצירים.
- (4) הראה שהפונקציה $h(x)$ אי-זוגית.
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
- (6) הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים רק בראשית הצירים. חשב את השטח המוגבל

בין הגרף של הפונקציה $g(x)$, גרף הפונקציה $h(x)$, הישר $x = -4$ והישר $x = 4$.

5. א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(\ln x - 1)^2}$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא אסימפטוטות לגרף הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) מצא תחומי עלייה, תחומי ירידה ונקודות קיצון של הפונקציה $f(x)$.

ב. בצויר שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

הנקודה $(e^4; \frac{1}{27})$ היא נקודת המקסימום של $f'(x)$.

(1) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ואת תחומי הקעירות

כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

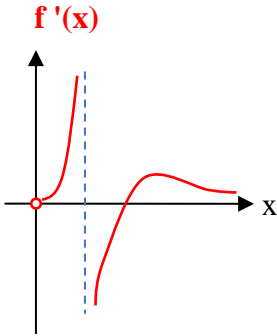
(1) מצא את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות לגרף לפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה, תחומי הירידה ואת שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x) = -f'(x)$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$,

גרף הפונקציה $h(x)$, הישר $x = e^3$ והישר $x = e^4$.



בהצלחה!

תשובות

$$1. \text{ א. } (1) \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} \quad (2) \quad y = -\frac{1}{2}x + 2.5 \quad \text{ב. } (1) \quad x^2 + (y - 2.5)^2 = 31.25$$

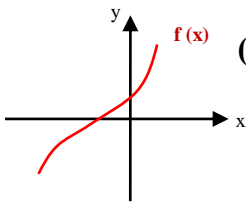
$$(2) \quad C(-5;0), B(-1;8) \quad \text{ג. } (1) \quad \frac{x^2}{31.25} + \frac{y^2}{6.25} = 1 \quad \text{ב. } (2)$$

$$\text{ד. } PA = 0.834, PC = 10.346$$

$$2. \text{ ג. } (1) \quad A(0;8;0), C(0;0;0), B(6;0;0) \quad (2) \quad 4x - z = 0 \quad (3)$$

$$3. \text{ א. } z_1 = -2 - 4i, z_2 = -5 + 12i \quad \text{ב. } n = 5 \quad \text{ג. } z^5 = 13^5 (\cos 203.1^\circ + i \sin 203.1^\circ) \quad \text{ד. } (2) \quad 13 \operatorname{cis}(148.62^\circ)$$

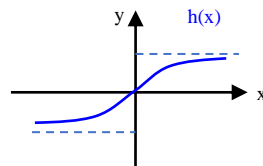
$$4. \text{ א. } (2) \quad \left(0; \frac{e^{2a} - 1}{e^a}\right), (-a; 0) \quad (3) \quad \text{שלילית בתחום } x < -a \text{ וחיובית בתחום } x > -a$$



$$(3) \quad \text{ב. קעורה כלפי מעלה עבור } x > -a \text{ וקעורה כלפי מטה עבור } x < -a$$

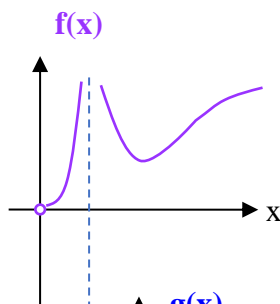
ג. (1) $a = 1$ (3) הערך המינימלי: -52.616 , הערך המקסימלי: 93.8

ד. (1) כל $x > 0$ תחום החיוביות: $x > 0$, תחום השליליות: $x < 0$



$$(3) \quad y = 1, y = -1 \quad (5) \quad 98.62 \quad (6)$$

$$5. \text{ א. } (1) \quad 0 < x < e, x > e \quad (2) \quad x = e \quad (3) \quad \text{תחומי עלייה: } 0 < x < e, x > e$$



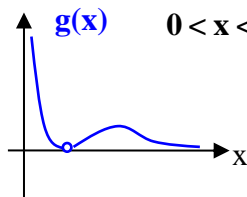
$$\text{תחום ירידה: } e < x < e^3; \text{ נקודת מינימום } (e^3; \frac{e^3}{4})$$

$$\text{ב. } (1) \quad \text{תחומי הקעירות כלפי מעלה: } 0 < x < e, e < x < e^4$$

$$(2) \quad \text{תחום הקעירות כלפי מטה: } x > e^4$$

$$\text{ג. } (1) \quad \text{תחום ההגדרה: } 0 < x < e, x > e \quad (2) \quad y = 0, x = 0$$

$$(2) \quad \text{תחום העלייה: } e < x < e^3, \text{ תחומי ירידה: } 0 < x < e, x > e^3$$



$$(3) \quad \text{נקודת מקסימום } (e^3; \frac{4}{e^3})$$

$$\text{ד. } 7.38$$

מבחן מס' 2

משך הבחינה: שעתיים ורבע

פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים

1. נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. ישר המאונך לציר ה- x , העובר דרך מוקד הפרבולה חותך את הפרבולה בנקודה A הנמצאת ברביע הראשון. דרך הנקודה A עובר מיתר AB של הפרבולה. הנקודה B נמצאת ברביע הרביעי. שיפוע הישר AB הוא -2 ומרחקו מקודקוד הפרבולה הוא $2\sqrt{5}$.

א. מצא את משוואת הפרבולה.

2. מצא את שיעורי הנקודה B.

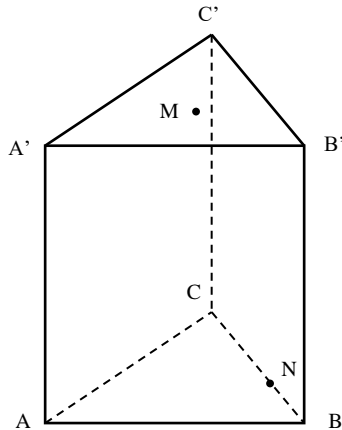
ב. הנקודה C נמצאת על הישר עליו נמצא המיתר AB והנקודה D נמצאת על הישר עליו נמצא הקטע AO (ראשית הצירים). הנקודות C ו-D נמצאות מתחת לציר ה- x .

1. מצא את משוואת הישר עליו נמצא מרכז המעגל החסום במשולש ACD.

2. הנקודה C נמצאת על הישר $y = -14$ והנקודה D נמצאת על הישר $x = -3.2$.

מצא את משוואת המעגל החסום במשולש ACD.

3. מצא את משוואת המעגל החסום את המשולש ACD.



2. ABCA'B'C' מנסרה משולשת ישרה.

הנקודה M היא מפגש התיכונים של הפאה A'B'C'.

הנקודה N נמצאת על הצלע BC כך ש- $\overline{BN} = \frac{2}{5}\overline{BC}$.

נסמן: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$.

א. 1) הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את \overline{AM} ואת \overline{AN} .

2) מהו המצב ההדדי של הישרים עליהם נמצאים

הווקטורים \overline{AM} ואת \overline{AN} ? נמק.

3) נתון: $|\underline{u}| = \sqrt{140}$, $|\underline{v}| = \sqrt{11}$, $|\underline{w}| = \sqrt{37.5}$.

חשב את הזווית $\angle MAN$. $\cos \angle BAC = 0.8664$.

ב. נתון: המקצוע AC נמצא על הישר $\ell_1 = (-1; 0; 4) + t(1; -1; 3)$

והמקצוע AB נמצאת על הישר $\ell_2 = (-2; -7; 17) + r(1; 3; -5)$, $\underline{w} = (2.5; m; k)$,

$C'(1.5; -5; 1.5)$, $B'(4.5; 0; -5.5)$

1. מצא את שיעורי הנקודה A.

2. מצא את m ואת k.

3. מצא את \underline{u} ואת \underline{v} .

4. מצא את ההצגות הפרמטריות של הישרים עליהם נמצאים הקטעים A'M ו-A'N.

5. חשב את הזווית בין הישרים A'M ו-A'N.

3. א. הראה כי המקומות הגיאומטריים של הנקודות במישור של גאוס המקיימות את המשוואות
 $|z + 2 - 4i| = \sqrt{20}$ ו- $|z - 5 + 10i| = \sqrt{125}$ הם שני מעגלים העוברים דרך ראשית הצירים.

ב. (1) נסמן את מרכזי המעגלים ב- z_1 ו- z_2 , $|z_1| < |z_2|$. הראה שהנקודות במישור של גאוס המתאימות למספרים z_1, z_2, \bar{z}_1 ו- \bar{z}_2 הם קודקודים של טרפז שאלכסוניו עוברים דרך ראשית הצירים.

(2) חשב את הזווית החדה בין אלכסוני הטרפז.

(3) מצא את פתרונות המשוואה $z_1 \cdot z_2 = iw^4$.

פרק שני- פונקציה מעריכית ופונקציה לוגריתמית

4. נתונות הפונקציות :

$$h(x) = x^2 + \ln(2x - 6)^2, \quad g(x) = x^2 + 2\ln(x - 3), \quad f(x) = x^2 + \ln(x - 3)^2$$

א. מצא, לכל אחת מן הפונקציות:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

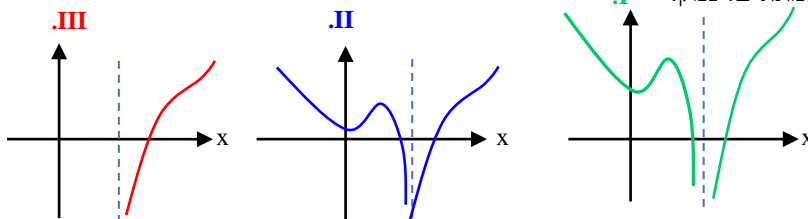
(2) אסימפטוטות לגרף הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) תחומי עלייה, תחומי ירידה ונקודות קיצון (אם יש כאלה).

(4) נקודות פיתול, תחומי קעירות כלפי מעלה ותחומי קעירות כלפי מטה.

ב. לפניך שלושה גרפים של פונקציות. התאם לכל אחת מן הפונקציה $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$

את הגרף המתאים. נמק.



ג. (1) הסבר מדוע בתחום $x > 3$ מתקיים: $f(x) = g(x)$.

(2) נתון: $h(x) = f(x) + k$. מצא את הערך של k .

5. נתונה הפונקציה : $f(x) = 1 + x \cdot e^x$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

2) הראה ש- $f(x) > 0$ לכל ערך של x .

ב. נתונה פונקציה נוספת : $g(x) = \frac{e^x + x \cdot e^x}{1 + x \cdot e^x}$.

1) הראה שהפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .

2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

3) מצא לפונקציה $g(x)$ אסימפטוטות מאונכות לצירים.

4) לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום בנקודה שבה $x = -1.841$ ונקודת מקסימום בנקודה שבה

$x = 1.146$. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת : $h'(x) = g(x)$.

1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $h(x)$.

2) גרף הפונקציה $h(x)$ עובר דרך ראשית הצירים. מצא את הפונקציה $h(x)$.

3) מצא לפונקציה $h(x)$ אסימפטוטות מאונכות לצירים.

4) סרטט גרף של הפונקציה $h(x)$.

תשובות

$$1. \text{א. } (x-2.5)^2 + (y+4.5)^2 = 18.05 \quad (2 \quad x = 2.5 \quad (1 \quad \text{ב. } B(10; -10) \quad (2 \quad y^2 = 10x \quad (1 \quad \text{א. } 1$$

$$(x-7.25)^2 + (y+4.5)^2 = 112 \frac{13}{16} \quad (3$$

$$2. \text{א. } \angle MA'N = 36.54^\circ \quad (3 \quad \text{מצטלבים } (2 \quad \overline{A'N} = \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} - \underline{w}, \quad \overline{A'M} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \quad (1 \quad \text{א. } 2$$

$$\underline{u} = (2; 6; -10), \quad \underline{v} = (-1; 1; -3) \quad (3 \quad k = -2.5, \quad m = -5 \quad (2 \quad A(0; -1; 7) \quad (1 \quad \text{ב. } 1$$

$$\ell: \underline{x} = (2.5; -6; 4.5) + s(1; -5; -13) : A'M \quad (4$$

$$36.54^\circ \quad (5 \quad \ell: \underline{x} = (2.5; -6; 4.5) + q(-17; 90; -47) : A'N$$

$$3. \text{א. } (x+2)^2 + (y-4)^2 = 20, \quad (x-5)^2 + (y+10)^2 = 125 \quad (2 \quad \text{ב. } 53.14^\circ$$

$$(3 \quad \sqrt[4]{50}\text{cis}(-9.215^\circ), \sqrt[4]{50}\text{cis}(80.785^\circ), \sqrt[4]{50}\text{cis}(170.785^\circ), \sqrt[4]{50}\text{cis}(260.785^\circ)$$

$$4. \text{א. } (1 \quad f(x) : x < 3, \quad x > 3; \quad g(x) : x > 3; \quad h(x) : x < 3, \quad x > 3 \quad (2 \quad \text{הישר } x = 3$$

אסימפטוטה אנכית לכל אחת מן הפונקציות (2 לכל אחת מן הפונקציות: אין אסימפטוטה

מאונכת לציר ה- y . (3 $f(x)$: (0.382; 2.07) מינימום, (2.618; 4.929) מקסימום,

תחומי העלייה: $x > 3, 0.382 < x < 2.618$;

תחומי ירידה: $2.618 < x < 3, x < 0.382$; $g(x)$: אין נקודות קיצון, תחום עלייה: $x > 3$,

תחום ירידה: אין $h(x)$: (0.382; 3.457) מינימום, (2.618; 6.315) מקסימום,

תחומי העלייה: $x > 3, 0.382 < x < 2.618$; תחומי ירידה: $2.618 < x < 3, x < 0.382$

(4 $f(x)$: נקודות פיתול: (2; 4), (4; 16), תחומי קעירות כלפי מעלה:

$x > 2, x < 4$, תחומי קעירות כלפי מטה: $3 < x < 4, 2 < x < 3$

$g(x)$: נקודת פיתול: (4; 16), תחום הקעירות כלפי מעלה: $x > 4$,

תחום הקעירות כלפי מטה: $3 < x < 4$

$h(x)$: נקודות פיתול: (4; 17.386), (2; 5.386), תחומי קעירות כלפי מעלה: $x > 4, x < 2$,

תחומי קעירות כלפי מטה: $2 < x < 3, 3 < x < 4$

ב. $f(x)$: גרף II, $g(x)$: גרף III, $h(x)$: גרף I (ג. $k = \ln 4$

$$5. \text{א. } (1 \quad (-1; 0.632) \quad \text{מינימום } (2 \quad (-1; 0), (0; 1) \quad (3 \quad y = 0, y = 1 \quad (4$$

ג. (1 תחום העלייה: $x > -1$, תחום הירידה: $x < -1$

$$(2 \quad h(x) = \ln(1 + x \cdot e^x) \quad (3 \quad y = 0 \quad (4$$

