מיקוד חוברת 10 מתכונות שאלון 582 על פי מיקוד חורף-קיץ תשפ"ב
כולל הקלות דצמבר 2021 והקלות פברואר 2022

מבחן	שאלה	סעיפים שירדו
1	3	השאלה הוחלפה
2	3	ג
	4	הכול
3	4	ג
	5	הכול
4	2	הכול
5	5	ה- 2
6	4	נוסף סעיף
7	3	השאלה הוחלפה
8	3	השאלה הוחלפה
	4	ג , ד , ה
	5	הכול
9	3	ב- 4)
	4	הכול
10	3	השאלה הוחלפה
	4	הכול

שאלות להחלפה (מעודכנות על פי
מיקוד חורף-קיץ תשפ"ב)

מבחן מס' 1 , שאלה מס' 3

3. א. פתור את המשוואה: $2i\,\bar{z} + 3z + 18 = |z|^2$.

ב. הנקודה A נמצאת ברביע השני במישור של גאוס ומייצגת את אחד הפתרונות של המשוואה.
הנקודה A מייצגת את הקודקוד A של מצולע משוכלל בעל n צלעות , $n > 4$.
הנקודות B , C , D , E , ... מייצגות את שאר הקודקודים על פי סדר האותיות , נגד כיוון השעון. המספר $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 5i)$ מייצג את הקודקוד D של המצולע.

1) מצא את n .
2) מצא את שטח המצולע.

ג. קודקודי המצולע מתאימים לפתרונות המשוואה $z^n = a + bi$.
1) מצא את המספר $a + bi$.
2) המספר המרוכב z_k , $1 \le k \le n$, הנו אחד מפתרונות המשוואה.

הראה שהנקודות המתאימות למספרים z_k ו- z_{k+4} נמצאות על ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים.

3) נסמן $z_k = r\text{cis}\theta$. הראה כי $z_{k+4} = -r\text{cis}\theta$.

<u>פתרון</u>:

א. נסמן: $z = x + yi$ ונקבל: $2i\,(x-yi) + 3(x+yi) + 18 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \Leftarrow$

$$2xi + 2y + 3x + 3yi) + 18 = x^2+y^2 \Rightarrow (3x+2y+18)+(2x+3y)i = \left(x^2+y^2\right)+0i \Rightarrow$$

$$3x+2y+18 = x^2+y^2 \cap 2x+3y=0 \Rightarrow x=-1.5y \Rightarrow 3(-1.5y)+2y+18 = (-1.5y)^2+y^2$$

$$\Rightarrow 3.25y^2+2.5y-18=0 \Rightarrow y_1 = 2\ ,\ y_2 = -\frac{36}{13} \Rightarrow x_1=-3\ ,\ x_2 = \frac{54}{13}$$

מתקבלים הפתרונות: $\mathbf{-3+2i}\ ,\ \mathbf{\frac{54}{13} - \frac{36}{13}i}$

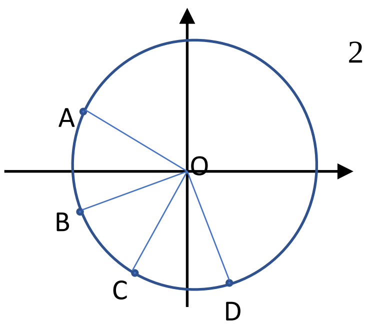
ב. 1) נמצא הצגה פרמטרית של המספר $z_A = -3+2i$:

$$R = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}\ ,\ \tan\theta = -\frac{2}{3} \Rightarrow \theta = -33.69^\circ + 180^\circ k\ ,\ 90^\circ < \theta < 180^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 146.31^\circ \Rightarrow z_A = \sqrt{13}\cdot\text{cis}\left(146.31^\circ\right)$$

נמצא הצגה פרמטרית של המספר $z_D = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-5i)$:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{13}\ ,\ \tan\theta = -5 \Rightarrow \theta = -78.69^\circ + 180^\circ k\ ,$$



$$270^\circ < \theta < 360^\circ \Rightarrow \theta = 281.31^\circ \Rightarrow z_A = \sqrt{13}\cdot\text{cis}\left(281.31^\circ\right)$$

הזווית המרכזית $\measuredangle AOB$ המתאימה לזווית המרכזית

הנוצרת בין כל שני קודקודים סמוכים של המצולע ,

היא בת $\frac{360^\circ}{n}$, לכן , $\measuredangle AOD = 3\cdot\frac{360^\circ}{n} = \frac{1080^\circ}{n}$

$\measuredangle AOD = 281.31^\circ - 146.31^\circ = 135^\circ$.

מקבלים: $\frac{1080^\circ}{n} = 135^\circ \Rightarrow \mathbf{n = 8}$

2) $AO = BO = \sqrt{13}, \measuredangle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow$

$8\cdot\frac{13\sqrt{2}}{4}=\mathbf{26\sqrt{2}}$ שטח המצולע הוא $\Leftarrow S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{13}\right)^2\cdot\sin 45^\circ=\frac{13\sqrt{2}}{4}$

ג. 1) פתרון המשוואה $z^8=a+bi$. נסמן : $a+bi=R\text{cis}\alpha$ ונקבל $z^8=R\text{cis}\alpha$

המספר $\sqrt{13}\cdot\text{cis}\left(281.31^o\right)$ הוא אחד מפתרונות המשוואה לכן מתקיים :

$$R\text{cis}\alpha=28561\text{cis}\left(90.48^o\right)\Leftarrow\left[\sqrt{13}\cdot\text{cis}\left(281.31^o\right)\right]^8=R\text{cis}\alpha$$

$$z^8=28561\text{cis}\left(90.48^o\right)=\mathbf{-239.269+28559.998\cdot i}$$

2) z_k הנו אחד מפתרונות המשוואה $z^8=28561\text{cis}\left(90.48^o+360^o k\right)$

$$\Rightarrow z_k=\sqrt[8]{28561}\text{cis}\left(\frac{90.48^o}{8}+45^o k\right)\Rightarrow z_k=\sqrt{13}\text{cis}\left(11.31^\circ+45^o k\right)$$

$$\Rightarrow z_{k+4}==\sqrt{13}\text{cis}\left[11.31^\circ+45^o(k+4)\right]=\sqrt{13}\text{cis}\left[\left(11.31^\circ+45^o k\right)+180^o\right]$$

מקבלים: אם נסמן ב- P את הנקודה המתאימה למספר z_k ונסמן ב- Q את הנקודה המתאימה

למספר z_{k+4} נקבל $\measuredangle POQ=180^\circ$ ולכן הנקודות P ו- Q נמצאות על ישר אחד העובר דרך

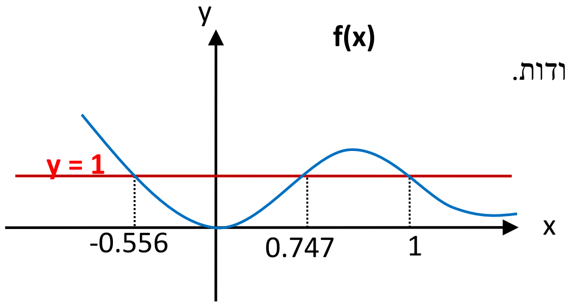
ראשית הצירים.

3) נתון : $z_k=r\text{cis}\theta=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\Rightarrow z_{k+4}=r\text{cis}\left(\theta+180^\circ\right)\Leftarrow$

$$z_{k+4}=r\left[\cos\left(\theta+180^\circ\right)+i\sin\left(\theta+180^\circ\right)\right]=r\left(-\cos\theta-i\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{z_{k+4}=-r\text{cis}\theta}$$

תוספת במבחן מס' 6 , שאלה מס' 4 , סעיף א* בין הסעיפים א' ו- ב' (צבירת שטח)



4. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.

הישר $y = 1$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשלוש נקודות.

שיעורי ה- x של הנקודות מסומנות בציור.

לפונקציה יש נקודות מינימום בראשית הצירים

ונקודת מקסימום בנקודה $(0.874;1.065)$.

א. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x))$.

(1 מצא את תחום ההגדרה של $g(x)$.

(2 מצא את שיעורי נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגה.

(3 מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(4 מצא אסימפטוטות לגרף הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(5 סרטט את גרף של הפונקציה $g(x)$.

א* הפונקציה $h(x)$ מוגדרת באופן הבא: $h(x) = \int_{0.747}^{x} (g(t))dt$ בתחום $0.747 \le x \le 1$.

(1 מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $h(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.

(2 נתון: $h(1) = 0.01$. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ בתחום הנתון.

(3 מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקציה $h(x)$ בתחום הנתון.

(4 סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $0.747 \le x \le 1$.

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(x) = x^2 e^{-x^3+1}$.

(1 הראה שהשטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 1$ בתחום $x > 0$ הוא בערך 0.0109 .

(2 נסמן ב- S את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה- x .
קבע איזו מבין הטענות הבאות נכונה ונמק את קביעתך (היעזר בנתונים ובתוצאות של הסעיפים הקודמים):

I. $S > 0.0109$ II. $S < 0.0109$ III. $S = 0.0109$

(3 הראה שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שתי נקודות פיתול ששיעורי ה- x שלהן הן $x = 0.491$ ו- $x = 1.235$ (בקירוב) .

(4 סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

(5 קבע את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g'(x)$.

פתרון סעיף א* :

הפונקציה $h(x)$ מייצגת את השטח המצטבר בין גרף

הפונקציה $g(x)$ וציר ה- x בתחום $0.747 \le x \le 1$.

1) גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל ציר ה- x בתחום זה,

לכן השטח המצטבר הולך וגדל . הפונקציה $h(x)$

עולה בכל התחום $0.747 \le x \le 1$.

2) המינימום המוחלט של הפונקציה מתקבל עבור $x = 0.747$:

$h(0.747) = \int_{0.747}^{0.747} (g(t))dt = 0$. מקבלים: **$(0.747;0)$ נקודת מינימום**

הערך המקסימלי מתקבל עבור $x = 1$:

$h(1) = \int_{0.747}^{1} (g(t))dt = 0.01$. מקבלים : **$(1;0.01)$ נקודת מקסימום.**

3) $h'(x) = g(x)$, לכן $h''(x) = g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$.

בתחום $0.747 \le x \le 1$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת מקסימום בנקודה $x = 0.874$.

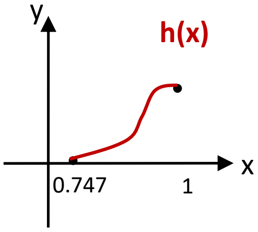
בתחום $0.747 < x < 0.874$ הפונקציה $f(x)$ חיובית ועולה , לכן $h''(x) > 0$.

בתחום $0.874 < x < 1$ הפונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת

לכן $h''(x) < 0$. מקבלים : **תחום הקעירות כלפי מעלה: $0.747 < x < 0.874$,**

תחום הקעירות כלפי מטה: $0.874 < x < 1$

4)



מבחן מס' 7 , שאלה מס' 3

3. נתונה המשוואה $z^4 = a + bi$. פתרונות המשוואה מיוצגים , במישור של גאוס , על-ידי ארבעה מספרים הנמצאים על המעגל $x^2 + y^2 = 2$. שניים מהם נמצאים על הישר $y = x$.

א. 1) מצא את a ו- b .

2) מצא את פתרונות המשוואה.

ב. הראה שפתרונות המשוואה: $7z^2 + 7\bar{z}^2 - 50z\bar{z} + 100 = 0$ מייצגים , במישור של גאוס , אליפסה קנונית ומצא את משוואת האליפסה.

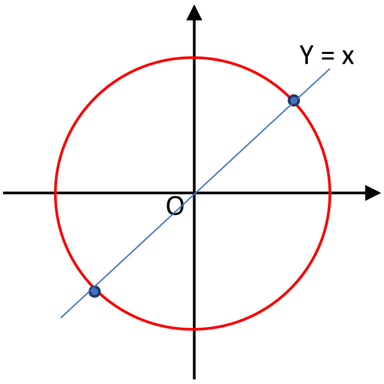
ג. 1) הראה פתרונות המשוואה $z^4 = a + bi$ עבור ערכי a ו- b שמצאת בסעיף א-1) נמצאים על האליפסה שמצאת בסעיף ב'.

2) אחד הפתרונות של המשוואה $z^4 = a + bi$ מיוצג במישור של גאוס על-ידי נקודה הנמצאת ברביע השני . חשב את היקף המשולש שיוצרת נקודה זו עם מוקדי האליפסה שמצאת בסעיף ב' .

א. 1) $a = -4, b = 0$ **2)** $\sqrt{2}cis(45^\circ) = 1 + i, \sqrt{2}cis(135^\circ) = -1 + i$

$\sqrt{2}cis(225^\circ) = -1 - i, \sqrt{2}cis(315^\circ) = 1 - i$

ב. $9x^2 + 16y^2 = 25 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{25}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{25}{16}} = 1$ **ג. 2)**



<u>פתרון:</u>

א. 1) נסמן ב- $z_1 = R\text{cis}\theta$ את אחד הפתרונות של המשוואה.

הנקודה המתאימה נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = 2$, לכן ,

$R = \sqrt{2}$. הנקודה גם נמצאת על הישר $y = x$ לכן

$\tan\theta = 1$ או $\tan\theta = -1$ ולכן $\theta = 45^\circ$ או $\theta = 225^\circ$.

פתרון המשוואה מקיים את המשוואה $z_1{}^4 = a + bi \Leftarrow$

$$-4 = a + bi \Leftarrow 4\text{cis}180^\circ = a + bi \Leftarrow \left(\sqrt{2}\text{cis}45^\circ\right)^4 = a + bi$$

$$\mathbf{a = -4, b = 0} \Leftarrow$$

(או $\left(\sqrt{2}\text{cis}225^\circ\right)^4 = a + bi \Rightarrow 4\text{cis}180^\circ = a + bi \Rightarrow -4 = a + bi$)

2) $z^4 = -4 \Rightarrow z^4 = 4\text{cis}(180^\circ + 360^\circ k) \Rightarrow z_k = \sqrt{2}\text{cis}(45^\circ + 90^\circ k) \Rightarrow$

ארבעת פתרונות המשוואה הם :

$$\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ\right) = 1 + i\, , \sqrt{2}\text{cis}\left(135^\circ\right) = -1 + i\, , \sqrt{2}\text{cis}\left(225^\circ\right) = -1 - i\, , \sqrt{2}\text{cis}\left(315^\circ\right) = 1 - i$$

ב. נסמן : $z = x + yi$ ונציב במשוואה הנתונה: $7z^2 + 7\bar{z}^2 - 50z\bar{z} + 100 = 0$. מקבלים:

$$7(x+yi)^2 + 7(x-yi)^2 - 50(x+yi)(x-yi) + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$7x^2 + 14xyi + 7y^2i^2 + 7x^2 - 14xyi + 7y^2i^2 - 50(x^2 - y^2i^2) + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$14x^2 - 7y^2 - 7y^2 - 50(x^2 + y^2) + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$14x^2 - 14y^2 - 50x^2 - 50y^2 + 100 = 0 \Rightarrow 36x^2 + 64y^2 = 100 \Rightarrow$$

$$\mathbf{9x^2 + 16y^2 = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{25}{9}} + \frac{y^2}{\frac{25}{16}} = 1}$$

ג. 1) ארבעת פתרונות המשוואה מקיימים: $x^2 = 1$ וגם $y^2 = 1$, לכן הם מקיימים את המשוואה $9x^2 + 16y^2 = 25$.

2) הפתרון $(-1 + i)$ של המשוואה $z^4 = -4$ מיוצג במישור של גאוס על ידי הנקודה $(-1;1)$ הנמצאת ברביע השני. נמצא את מוקדי האליפסה:

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{25}{9} - \frac{25}{16} = \frac{175}{144} \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{7}}{12}$$

לכן מוקדי האליפסה נמצאים בנקודות $\left(\frac{5\sqrt{7}}{12};0\right)$ ו- $\left(-\frac{5\sqrt{7}}{12};0\right)$

$$S_{ABCD} = \frac{(4+4\sqrt{3})\cdot 2(1+\sqrt{3})}{2} = 4(1+\sqrt{3})^2 = \mathbf{16 + 8\sqrt{3}}$$

3) AD מאונך לציר ה- x בנקודה E ו- BC מאונך לציר ה- x בנקודה F .

$\measuredangle OAE = 30^\circ$. משולש AOB ישר זווית ושווה-שוקיים

לכן $\measuredangle BAO = \measuredangle ABO = 45^\circ \Rightarrow \measuredangle BAD = 75^\circ$.

טרפז חסום במעגל הוא טרפז שווה-שוקיים לכן

$\boldsymbol{\measuredangle BAD = \measuredangle ADC = 75^o \Rightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle BCD = 105^o}$

ב. $P = z_2^{10} = \left(4cis150^\circ\right)^{10} = 4^{10}cis60^\circ \Leftarrow$ הנקודה P נמצאת

על הישר OP היוצר זווית בת 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

מבחן מס' 8 שאלה מס' 3

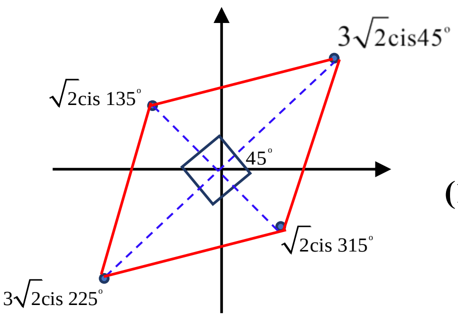
3. א. 1) פתור את המשוואה: $z^4 - 16i \cdot z^2 + 36 = 0$.

2) הראה שמכפלת הפתרונות היא מספר ממשי.

ב. 1) סמן את פתרונות המשוואה בצורה $z = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ במישור של גאוס .

2) הראה שהנקודות שסימנת בסעיף הקודם יוצרות מעוין.

3) חשב את שטח המעוין.



<u>תשובות</u> : א. 1) $-3-3i\ ,\ 3+3i\ ,\ -1+I\ ,\ 1-i$ או

ב. 1) $3\sqrt{2}cis\ 225^o,\ 3\sqrt{2}cis\ 45^o, \sqrt{2}cis\ 135^o\ ,\ \sqrt{2}cis\ 315^o$

3) 12

<u>פתרון</u>:

א. 1) נסמן $z^2 = w$ ונקבל $w^2 - 16i \cdot w + 36 = 0 \Leftarrow$

$$w_{1,2} = \frac{16i \pm \sqrt{(-16i)^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{16i \pm \sqrt{-400}}{2} = \frac{16i \pm 20i}{2} \Rightarrow w_1 = 18i\ ,\ w_2 = -2i$$

מקבלים: I. $z^2 = 18i \Rightarrow z = x + yi \Rightarrow (x+yi)^2 = 18i \Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = 18i$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0\ ,\ 2xy = 18 \Rightarrow y = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 - \left(\frac{9}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow x^4 = 81 \Rightarrow x = \pm 3$$

עבור $x = 3$ מקבלים $y = 3$, עבור $x = -3$ מקבלים $y = -3$. מתקבלים הפתרונות

$z = 3+3i$ ו- $z = -3-3i$

נמצא את הפתרונות האחרים בדרך אחרת:

מספר מדומה טהור נמצא על ציר ה- y במישור של גאוס: $i = cis90^\circ,\ -i = cis270^\circ$

$$\text{II.}\ \ z^2 = -2i \Rightarrow z^2 = 2cis(270^\circ + 360^\circ k) \Rightarrow z_k = \sqrt{2}cis(135^\circ + 180^\circ k) \Rightarrow$$

$$z_1 = \sqrt{2}cis135^\circ = \mathbf{-1+i}\ ,\ z_2 = \sqrt{2}cis315^\circ = \mathbf{1-i}$$

ההצגה הטריגונומטרית של ארבעת הפתרונות:

$$3+3i \Rightarrow R = 3\sqrt{2}\ ,\ \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ + 180^\circ\ ,0^\circ < \theta < 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$z_3 = \mathbf{3\sqrt{2}cis\,45^o}$$

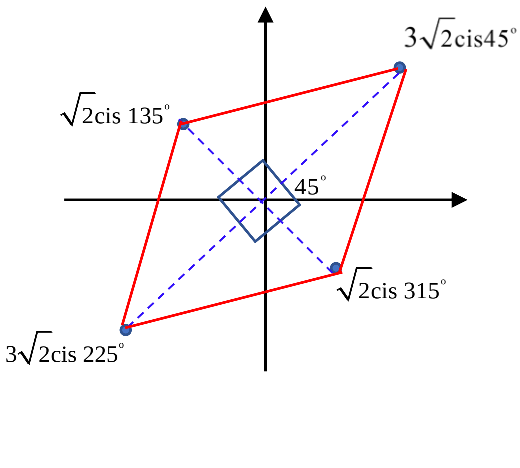
$$-3-3i \Rightarrow R = 3\sqrt{2}\ ,\ \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ + 180^\circ\ ,180^\circ < \theta < 270^\circ \Rightarrow \theta = 225^\circ$$

$$z_4 = \mathbf{3\sqrt{2}cis\,225^o}$$

2) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \sqrt{2}cis\,135^o \cdot \sqrt{2}cis\,315^o \cdot 3\sqrt{2}cis\,45^o \cdot 3\sqrt{2}cis\,225^o =$

מספר ממשי $= 36cis(135^o + 315^o + 45^o + 225^o) = 36cis720^\circ = 36$

ב. 1)



2) אלכסוני המרובע שקודקודיו הם פתרונות המשוואה, חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה , לכן , המרובע הוא מעוין.

3) אורך האלכסון הגדול של המעוין הוא $6\sqrt{2}$
ואורך האלכסון הקטן הוא $2\sqrt{2}$

לכן , שטח המעוין הוא $\frac{6\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2} = \mathbf{12}$

מבחן מס' 10 , שאלה מס' 3

3. נתון מספר מרוכב : $z = R\text{cis}\alpha$.

א. הראה כי: $\frac{z}{\bar{z}} = \text{cis}2\alpha$.

ב. נתון כי: $|z| + |\bar{z}| + \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 7$, $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

מצא את z.

<u>פתרון:</u>

א. $z = R(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow \bar{z} = R(\cos\alpha - i\sin\alpha)$

$\Rightarrow \bar{z} = R(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \Rightarrow \bar{z} = R\text{cis}(-\alpha)$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{R\text{cis}\alpha}{R\text{cis}(-\alpha)} = \text{cis}(\alpha-(-\alpha)) = \mathbf{cis2\alpha}$$

ב. $|z| + |\bar{z}| + \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 7 \Rightarrow R=3 \quad \Leftarrow \quad R + R + 1 = 7 \quad \Leftarrow \quad |z| = |\bar{z}| = R$

$\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{z}{\bar{z}} = \text{cis}2\alpha \Rightarrow \text{cis}2\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ההצגה הטריגונומטרית של $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ היא: $\tan\beta = -\sqrt{3}$, $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\Rightarrow \beta = -60^\circ + 180^\circ k$; β נמצאת ברביע השני , לכן $\beta = 120^\circ$.

לכן: $\text{cis}2\alpha = \text{cis}120^\circ \Rightarrow 2\alpha = 120^\circ + 360^\circ k \Rightarrow \alpha = 60^\circ + 180^\circ k$

$180^\circ < \alpha < 270^\circ \Rightarrow \alpha = 240^\circ$

$\Rightarrow \mathbf{z = 3cis240^\circ} \Rightarrow z = 3(\cos240^\circ + i\sin240^\circ) \Rightarrow \mathbf{z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$