מבחן מס' 2 , שאלה מס' 8

נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

א. 1) הבע את $g'(x)$ בעזרת $f(x)$ ו- $f'(x)$.

2) האם קיימים ערכי x עבורם מתקיים $\frac{f'(x)}{g'(x)}>0$? נמק.

ב. עבור כל אחת מן הפונקציות מצא :

1) אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x .

2) נקודות חיתוך עם הצירים .

ג. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$. קבע את סוג הקיצון של הפונקציה $f(x)$, את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה .

ד. 1) מצא , בעזרת סעיפים קודמים , את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

2) סרטט את הגרפים של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

ה. מהו ערך הביטוי $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ בנקודות בהן נחתכים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$?

<u>תשובות סופיות:</u>

א. 1) $g'(x)=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ 2) לא

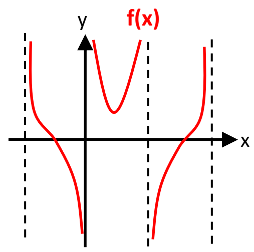
ב. 1) $f(x)$: $x=-\frac{\pi}{2}, x=0, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi$, $g(x)$: $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$

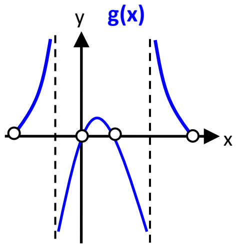
2) $f(x)$: $(\frac{3\pi}{4};0)$, $(-\frac{\pi}{4};0)$, $g(x)$: אין

ג. 1) $(\frac{\pi}{4};\sqrt{2})$ מינימום , תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$,

תחומי ירידה: $-\frac{\pi}{2}<x<0$, $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. 1) $(\frac{\pi}{4};\frac{1}{\sqrt{2}})$ מקסימום 2)





ה. 1 -

פתרון:

א. 1) $g(x)=\frac{1}{f(x)} \Rightarrow \mathbf{g'(x) = -\frac{f\,'(x)}{[f(x)]^2}}$.

2) **לא קיימים** ערכי x עבורם הביטוי חיובי $\frac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = f\,'(x)\cdot\left(-\frac{[f\,(x)]^2}{f\,'(x)}\right) = -[f\,(x)]^2 \le 0 \Rightarrow$

ב. 1) f(x) : $f(x)=\frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$. נמצא את ערכי x בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ עבורם $\sin 2x = 0$:

$2x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$. בכל אחת מן הנקודות האלה , ערכי הפונקציה f(x) שואפים ל- $\pm\infty$, לכן, מתקבלות האסימפטוטות:

$$\mathbf{x = -\frac{\pi}{2}, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi}$$

g(x) : $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ לכן הפונקציה g(x) איננה מוגדרת בנקודות בהן f(x) איננה מוגדרת.

בכל אחת מן הנקודות $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ ערכי הפונקציה f(x)
שואפים ל- $\pm\infty$, לכן , ערכי הפונקציה g(x) שואפים ל- 0 בנקודות אלה.
מקבלים: $(\pi;0)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $(0;0)$, $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ הן "נקודות ריקות".

g(x) איננה מוגדרת כאשר: $\sin x + \cos x = 0 \Leftarrow$
$\tan x + 1 = 0\ (\cos x \ne 0) \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow$

הפתרונות בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$: $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

בנקודות אלה ערכי הפונקציה g(x) שואפים ל- $\pm\infty$, לכן, מתקבלות האסימפטוטות:

$$\mathbf{x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}}$$

2) f(x) : הפונקציה איננה מוגדרת עבור $x = 0$ לכן אין חיתוך עם ציר ה- y . חיתוך עם ציר ה- x :

$\sin x + \cos x = 0 \Leftarrow$ מתקבלות הנקודות $\left(\mathbf{\frac{3\pi}{4};0}\right)$, $\left(\mathbf{-\frac{\pi}{4};0}\right)$

g(x): הפונקציה איננה מוגדרת כאשר $\sin 2x = 0$, לכן , **אין** לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.

ג. אפשרות 1: להציב ערכים בנגזרת של הפונקציה:

$$f\,'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)\cdot \sin 2x - 2\cos 2x \cdot (\sin x + \cos x)}{(\sin 2x)^2}$$

אפשרות 2 : ניעזר בתחום ההגדרה ובנקודות האפס של הפונקציה , על ידי חישוב ערכי הפונקציה בתחומים שונים:

x	-0.5π		-0.25π		0		0.5π		0.75π		π
f(x)		+	0	-		+		-	0	+	

לפונקציה יש נקודת קיצון יחידה בתחום $0 < x < 0.5\pi$, הפונקציה חיובית בתחום זה וערכיה שואפים ל- ∞ בקצות התחום , לכן , ניתן להסיק שבנקודה שבה $x = 0.25\pi$ יש לפונקציה נקודת מינימום.

$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ לכן מקבלים: $\left(\frac{\pi}{4};\sqrt{2}\right)$ **נקודת מינימום** של הפונקציה.

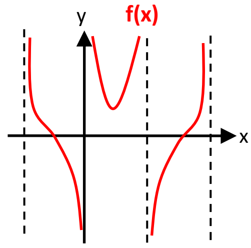
בתחום $0 < x < 0.5\pi -$ ערכי הפונקציה קטנים , לכן הפונקציה יורדת.

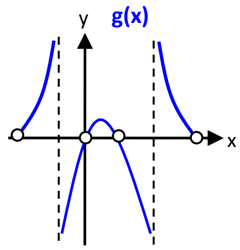
בתחום $0.5\pi < x < \pi$ ערכי הפונקציה גדלים , לכן הפונקציה עולה.

מקבלים: **תחומי עלייה:** $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, **תחומי ירידה:** $-\frac{\pi}{2} < x < 0 , 0 < x < \frac{\pi}{4}$

ד. 1) $g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ לכן $g'(x) = 0$ כאשר $f'(x) = 0$ וסימני הנגזרת $g'(x)$ בתחומים השונים הפוכים לאלה של $f'(x)$. מקבלים: $(\frac{\pi}{4};\frac{1}{\sqrt{2}})$ **מקסימום**

2) מתקבלים הגרפים:

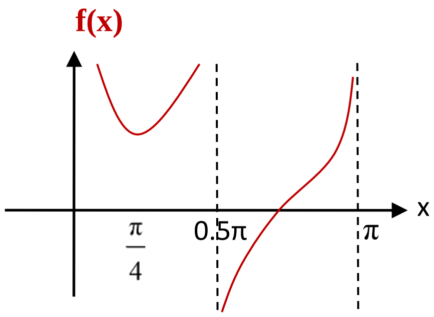




ה. בנקודות החיתוך של f(x) ו- g(x) מתקיימים: $f(x) = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow [f(x)]^2 = 1 \Rightarrow f(x) = \pm 1$.

ראינו כי $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mathbf{-1}$

מבחן מס' 9 , שאלה מס' 8



בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$. הישרים

$x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ הנם אסימפטוטות לגרף הפונקציה $f(x)$.

לפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ אותו תחום הגדרה.

הנקודה $\left(\frac{\pi}{4};10\sqrt{2}\right)$ היא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$. נמק את שיקוליך.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g'(x) = f(x)$.

(1 הסבר מדוע יש לפונקציה $g(x)$ נקודת מינימום בתחום $0 \le x \le \pi$.

(2 מהו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$? נמק.

(3 מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.

ג. נתונה הפונקציה : $y = \frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x}$, $a > 0$ המתאר את אחת מן הפונקציות $f(x)$ או $f'(x)$.

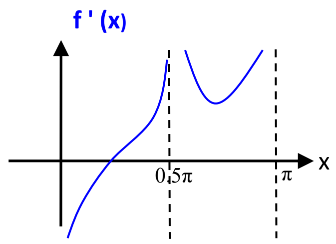
(1 איזו מן הפונקציות $f(x)$ או $f'(x)$ מתארת הפונקציה y ? נמק.

(2 מצא את a .

(3 מצא את שיעור ה-x של נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

(4 מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

א.



ב. (2 $10\sqrt{2}$ (3 תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$:

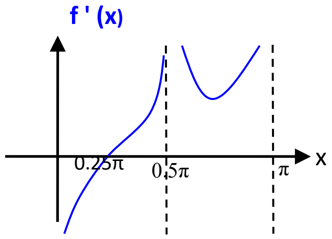
$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad , \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

תחום הקעירות כלפי מטה $\cap$: $0 < x < \frac{\pi}{4}$

ג. (1 $f(x)$ (2 $a = 5$ (3 $x = \frac{3\pi}{4}$ (4 $10\sqrt{2}$

פתרון:

א. על פי הפונקציה :



x	0	< x <	0. 25π	< x <	0.5π	< x <	π
f(x)		↘	min	↗		↗	
f '(x)		-	0	+		+	

על פי הנתונים ועל פי תחומי החיוביות והשליליות של $f\,'(x)$ מתקבל הגרף:

ב. 1) נסמן ב- t , $0.5\pi < t < \pi$, את שיעור ה- x של הנקודה שבה $f(x) = 0$.
נקבל:

x	0	< x <	0. 5π	< x <	t	< x <	π
g'(x)		+		-	0	+	
g(x)		↗		↘	min	↗	

מסקנה: לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום בתחום $0.5\pi < x < \pi$

2) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ הוא $g'(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = \mathbf{10\sqrt{2}}$

3) $g'(x) = f(x)$ לכן , כאשר $f(x)$ עולה , $g(x)$ קעורה כלפי מעלה. כאשר $f(x)$ יורדת , $g(x)$ קעורה כלפי מטה. מקבלים: **תחומי הקעירות כלפי מעלה:** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < x < \pi}$, $\boldsymbol{\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}}$

תחום הקעירות כלפי מטה ∩ : $\boldsymbol{0 < x < \frac{\pi}{4}}$

ג. 1) נציב $x = \frac{\pi}{4}$ בפונקציה $y = \frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x}$:

$$y = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}a$$

נתון $a > 0$, לכן, בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$, $y \neq 0$ לכן $y \neq f\,'(x)$. מסקנה : $y = \mathbf{f(x)}$.

2) נתון: $f(\frac{\pi}{4}) = 10\sqrt{2}$. לכן: $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}a = 10\sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{a = 5}$.

3) $$g'(x) = f(x) = \frac{5}{\sin x} + \frac{5}{\cos x} = \frac{5(\cos x + \sin x)}{\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow$$
$$\tan x + 1 = 0\ (\cos x \neq 0) \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow$$

הפתרונות בתחום $\pi \le x \le 0$: $\Rightarrow \mathbf{x = \frac{3\pi}{4}}$

4) $g'(x) = f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$$f(x) = \frac{5}{\sin x} + \frac{5}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{5\cos x}{\sin^2 x} + \frac{5\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(\frac{3\pi}{4}) = \mathbf{10\sqrt{2}}$$

בעיות קיצון נוספות

1. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה לכל ערך של x . נתונה פונקציית הנגזרת : $f'(x) = -\frac{16x}{x^2+1}$.

א. 1) הראה שהפונקציה $f'(x)$ אי-זוגית.

מצא:

2) את משוואות האסימפטוטות לגרף הפונקציה $f'(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

3) את נקודות חיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם הצירים.

4) את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ ואת סוגן.

ב. 1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

2) הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \int_{-5}^{x} f'(t)dt$. מצא בתחום $-5 \le x \le 5$ את הערך של x עבורו $g(x)$ מקסימלית ואת הערך של x עבורו $g(x)$ מינימלית.

ג. 1) מצא את תחומי העלייה , תחומי הירידה , תחומי הקעירות כלפי מעלה ואת תחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.

2) נתון: גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך ראשית הצירים. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $h(x) = af'(x)$, $a > 1$.

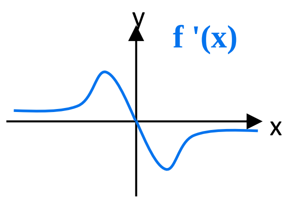
הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ נחתכים בנקודות בהן $x = 0$ ו- $x = 1.99$.

1) סרטט באותה מערכת צירים את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$.

2) הישר $x = t$, $0 < t < 1.99$, חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת גרף הפונקציה $h(x)$ בנקודה B. האורך המקסימלי של הקטע AB מתקבל עבור $t = 0.696$. מצא את a .

תשובות סופיות:

א. 2) $y = 0$ 3) $(0;0)$ 4) $(-1;8)$ מקסימום , $(1;-8)$ מינימום   **ב. 1)**

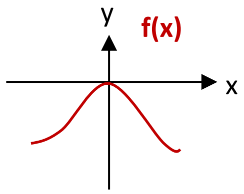


2) הערך המקסימלי מתקבל עבור $x = 0$, הערך המינימלי מתקבל עבור $x = 5$

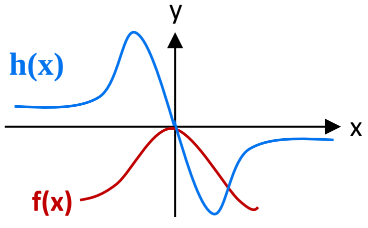
ג. 1) תחום העלייה: $x < 0$, תחום הירידה : $x > 0$,

תחומי הקעירות כלפי מעלה: $x < -1 , x > 1$

תחומי הקעירות כלפי מטה: $-1 < x < 1$ **2)**



ד. 1)



2) $a \approx 2$

פתרון:

א. 1) $f'(x)$ פונקציה אי-זוגית $f'(x)=-\dfrac{16x}{x^2+1}\Rightarrow f'(-x)=-\dfrac{16(-x)}{(-x)^2+1}=\dfrac{16x}{x^2+1}=-f'(x)\Rightarrow$

2) $x^2+1>0$ לכל ערך של x , לכן הפונקציה מוגדרת לכל x ולכן אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x .

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y :

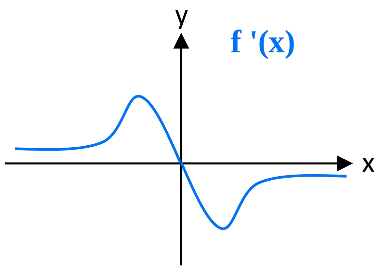
$$x\to\pm\infty\Rightarrow y\to=-\frac{x}{x^2}\to 0\Rightarrow \mathbf{y=0}$$

3) $f'(0)=0$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$ **(0;0)**

4) $f''(x)=\dfrac{-16(x^2+1)+16x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{16(-x^2-1+2x^2)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{16(x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow$

$$x^2-1\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow f'(1)=-8\ ,\ f'(-1)=8$$

x	x <	-1	< x <	1	< x
f ''(x)	+	0	-	0	+
f '(x)	↗	Max	↘	min	↗



ב. 1) מקבלים: **(-1;8) נקודת מקסימום , (1;-8) נקודת מינימום**

2) בתחום $-5\le x<0$ – הפונקציה g(x) צוברת ערכים חיוביים לכן הפונקציה עולה בתחום זה. בתחום $0<x<5$ הפונקציה צוברת ערכים שליליים , לכן היא יורדת בתחום זה. מקבלים:

הערך המקסימלי של g(x) מתקבל עבור x = 0 והערך המינימלי מתקבל עבור x = 5 .

ג. 1) תחומי העלייה והירידה:

x	x <	0	< x
f '(x)	+	0	-
f(x)	↗	Max	↘

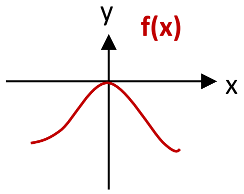
תחום העלייה: x < 0 , תחום הירידה : x > 0

x	x <	-1	< x <	1	< x
f ''(x)	+	0	-	0	+
f(x)	∪	פיתול	∩	פיתול	∪

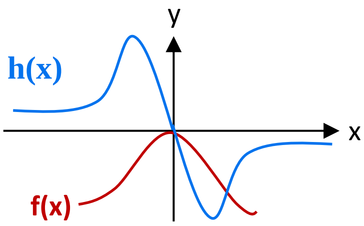
תחומי הקעירות כלפי מעלה: x < - 1 , x > 1

תחומי הקעירות כלפי מטה: -1 < x < 1

(2

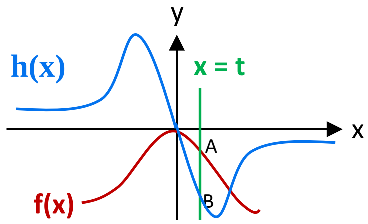


ד. 1) עבור a > 1 , גרף הפונקציה h(x) הוא "מתיחה אנכית" של גרף הפונקציה f '(x) . מתקבל הגרף:



2) נסמן: A(t;f(t)) , B(t;af '(t)). אורך הקטע AB הוא:

L(t) = f(t) – af '(t) , 0 < t < 1.28.



נמצא את הערך המקסימלי של הפונקציה $L(t)$:

$$L'(t) = f'(t) - af''(t) = 0 \Rightarrow f'(x) = af''(x) \Rightarrow$$

$$-\frac{16t}{t^2+1} = \frac{16a(t^2-1)}{\left(t^2+1\right)^2} \Rightarrow -t(t^2+1) = a(t^2-1)$$

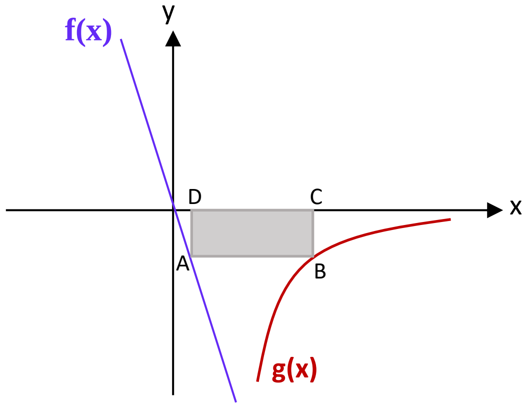
לפי הנתון , השוויון מתקיים עבור $x = 0.696$. מקבלים:

$$\mathbf{a \approx 2} \Leftarrow -1.033 = -0.5156a \Leftarrow -0.696(0.696^2+1) = a(0.696^2-1).$$

בדיקה: עבור $a = 2$:

$$L'(t) = -\frac{16t}{t^2+1} - \frac{32(t^2-1)}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{-16t\left(t^2+1\right) - 32(t^2-1)}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{16\left(-t^3 - t - 2t^2 + 2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$$

t	0	$< t <$	0.696	$< t <$	1.99
$L'(t)$		+	0	-	
$L(t)$		↗	Max	↘	



.2 בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -5x$

וגרף הפונקציה $g(x) = \frac{5}{2-x}$ בתחום $x > 2$.

המרובע ABCD בציור הוא מלבן. הצלע CD

נמצאת על ציר ה- x , הקודקודים A ו- B נמצאים

על הגרפים של הפונקציות f(x) ו- g(x) בהתאמה,

ברביע הרביעי. נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה B.

א. בטא באמצעות t את אורך הצלע BC.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B עבורם היקף המלבן ABCD מינימלי.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה g(x) בנקודה B שמצאת בסעיף ב'.

תשובות:

א. $-\frac{5}{2-t}$ **ב.** $A(0.5;-2.5)$, $B(4;-2.5)$ **ג.** $4y = 5x - 30$

פתרון:

א. נסמן: $B(t;\frac{5}{2-t})$. הנקודה B נמצאת ברביע הרביעי, לכן שיעור ה- y שלה שלילי.

אורך הקטע BC הוא $0 - \frac{5}{2-t} = -\frac{5}{2-t}$

ב. פונקציית המטרה היא הפונקציה המבטאת את היקף המלבן ABCD : $P(t) = 2(BC + AB)$.

נסמן : $A(x;-5x)$ ונקבל: $AB = t - x$. $y_A = y_B \Rightarrow -5x = \frac{5}{2-t} \Rightarrow x = -\frac{1}{2-t}$

מקבלים: $AB = t + \frac{1}{2-t} \Rightarrow P(t) = 2(t + \frac{1}{2-t} - \frac{5}{2-t}) \Rightarrow P(t) = 2t - \frac{8}{2-t}$, $t > 2$.

נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה :

$$P'(t) = 2 - \frac{0 - 8\cdot(-1)}{(2-t)^2} = 2 - \frac{8}{(2-t)^2} = 0 \Rightarrow 2(2-t)^2 = 8 \Rightarrow (2-t)^2 = 4 \Rightarrow$$

$2 - t = \pm 2 \Rightarrow t_1 = 0 , t_2 = 4$. $t > 2$ לכן , $t = 4$.

זיהוי הנקודה:

$$P''(t) = -\frac{-8\cdot 2\cdot(2-t)\cdot(-1)}{(2-t)^4} = -\frac{16(2-t)}{(2-t)^4} \Rightarrow P''(4) > 0 \Rightarrow$$

עבור $t = 4$ היקף המלבן ABCD מינימלי. מתקבלות הנקודות:

$$y_B = \frac{5}{2-4} = -2.5 \Rightarrow \mathbf{B(4;-2.5)} \Rightarrow y_A = -2.5 \Rightarrow x_A = 0.5 \Rightarrow \mathbf{A(0.5;-2.5)}$$

ג. נמצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $(4;-2.5)$:

$$g'(x) = \frac{5}{(2-x)^2} \Rightarrow g'(4) = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

משוואת המשיק : $\mathbf{4y = 5x - 30}$ $\quad y + 2.5 = \frac{5}{4}(x-4) \Rightarrow 4y + 10 = 5x - 20 \Rightarrow \mathbf{4y = 5x - 30}$