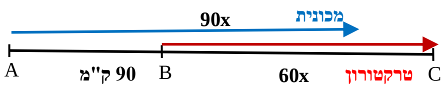
מבחן מס' 1

פתרון שאלה מס' 1



א. נסמן ב- x את זמן הנסיעה של הטרקטורון מיישוב B ליישוב C ונקבל:

	מהירות(קמ"ש)	זמן(שעות)	דרך(ק"מ)
טרקטורון	60	x	60x
מכונית	90	x	90x

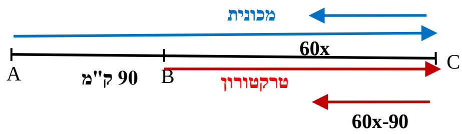
המכונית לא הגיעה ליישוב C כעבור x שעות, לכן: $90x < 90 + 60x \Leftarrow x < 3 \Leftarrow 60x < 180$

$\Leftarrow BC < 180$

נתון גם : $AB < BC \Leftarrow 90 < BC$

מכאן: **180 ק"מ $> BC >$ 90 ק"מ**

ב.

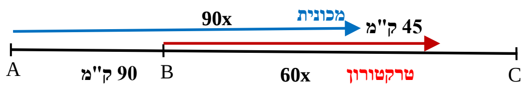


		מהירות(קמ"ש)	זמן(שעות)	דרך(ק"מ)
טרקטורון	תנועה	60	$\frac{120x-90}{60}$	60x+60x-90
	התעכבות		2	
מכונית	תנועה	90	$\frac{120x}{90}$	90+60x+60x-90
	התעכבות		$2\frac{1}{6}$	

מתקבלת המשוואה: $\frac{120x - 90}{60} + 2 = \frac{120x}{90} + 2\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \frac{4x-3}{2} = \frac{4x}{3} + \frac{1}{6} \Rightarrow 12x - 9 = 8x + 1 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = 2.5 \Rightarrow 60x = 150 \Rightarrow$$

BC = 150 ק"מ



ג. לפני שהטרקטורון הגיע ל- C:

נסמן ב- x את זמן הנסיעה של הטרקטורון עד שהמרחק בינו לבין המכונית קטן מ- 45 ק"מ ונקבל:

$90x + 45 = 90 + 60x \Rightarrow x = 1.5 \Rightarrow$

בשעה 8.30 המרחק בין המכונית לטרקטורון היה 45 ק"מ

הטרקטורון הגיע ל- C שעתיים וחצי לאחר צאתו מ- B , בשעה 9.30 ויצא מ-C בחזרה לעבר B בשעה 11:30. המכונית עברה את המרחק מ-A ל-C (240 ק"מ) ב- $2\frac{2}{3}$ שעות , כלומר, הגיעה ל-C בשעה 9.40 ויצאה בדרכה חזרה בשעה 11:50 , 20 דקות אחרי צאת הטרקטורון (הטרקטורון היה

אז במרחק 20 ק"מ מ- C , כלומר , לא ייתכן שהמכונית תהיה 45 ק"מ מאחורי הטרקטורון).
לכן , אם נסמן ב- t את זמן הנסיעה של המכונית בדרכה חזרה עד שתקדים את הטרקטורון ב- 45 ק"מ
נקבל: $90t-60(t+\frac{1}{3})=45 \Rightarrow 30t=65 \Rightarrow t=2\frac{1}{6}$
כלומר , כעבור שעתיים ועשר דקות , **בשעה 14.00**

פתרון שאלה מס' 2

א. $b_m=\sqrt{a_m\cdot a_{m+1}}=\sqrt{a_m\cdot a_m\cdot q}=\sqrt{(a_m)^2\cdot q}=a_m\cdot\sqrt{q}\quad (a_m>0\ ,q>0)$

$$\Rightarrow b_{m+1}=a_{m+1}\cdot\sqrt{q}\ \Rightarrow \frac{b_{m+1}}{b_m}=\frac{a_{m+1}\cdot\sqrt{q}}{a_m\cdot\sqrt{q}}=\frac{a_{m+1}}{a_m}=q\ \Rightarrow$$

הסדרה $b_1,b_2,b_3,...$ היא סדרה הנדסית ומנתה q .

ב. אם בסדרה $a_1,a_2,a_3,...$ ישנם 2n איברים, אז האיבר האחרון בסדרה $b_1,b_2,b_3,...$
הוא $\sqrt{a_{2n-1}\cdot a_{2n}}$, כלומר b_{2n-1} . הוכח: $b_n=a_n\cdot\sqrt{q}$ מקבלים:

$$a_{2n}=\sqrt{3}\cdot b_{2n-1}\Rightarrow a_{2n}=\sqrt{3}\cdot a_{2n-1}\cdot\sqrt{q}\Rightarrow$$

$$a_{2n-1}\cdot q=\sqrt{3}\cdot a_{2n-1}\cdot\sqrt{q}\Rightarrow\sqrt{q}=\sqrt{3}\Rightarrow \mathbf{q=3}$$

ג. נתון: $a_n\cdot a_{n+1}=19683\cdot b_1\cdot b_2$. הוכח: $b_n=a_n\cdot\sqrt{3}$ לכן מקבלים:

$$a_n\cdot a_n\cdot 3=19683\cdot a_1\cdot\sqrt{3}\cdot a_2\cdot\sqrt{3}\Rightarrow 3(a_n)^2=19683\cdot 3\cdot a_1\cdot a_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(a_1\cdot 3^{n-1}\right)^2=19683\cdot(a_1)^2\cdot 3\Rightarrow(a_1)^2\cdot\left(3^{n-1}\right)^2=59049\cdot(a_1)^2\Rightarrow$$

$$\left(3^{n-1}\right)^2=59049\Rightarrow 3^{n-1}=243\Rightarrow n-1=5\Rightarrow n=6\Rightarrow 2n=\mathbf{12}$$

ד. 1) הסדרה $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+.......$ היא סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא $\frac{1}{a_1}$
ומנתה : $\frac{1}{a_{n+1}}:\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}\cdot a_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{q}=\frac{1}{3}$. הסדרה מתכנסת וסכומה הוא

$$\frac{1}{a_1}:\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{a_1}:\frac{2}{3}=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2a_1}\Rightarrow\frac{3}{2a_1}=4.5\Rightarrow 9a_1=3\Rightarrow \mathbf{a_1=\frac{1}{3}}$$

2) הסדרה $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+.......$ היא גם סדרה הנדסית מתכנסת שמנתה $\frac{1}{3}$
כי $\frac{1}{b_{n+1}}:\frac{1}{b_n}=\frac{1}{3}$.

האיבר הראשון של הסדרה הוא $\frac{1}{b_1}=\frac{1}{a_1\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

מקבלים: $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+.......=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{2}{3}}=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

פתרון שאלה מס' 3

א. נסמן: A - קבוצת העובדים שנפשו בארץ , $\bar{A}$ - קבוצת העובדים שנפשו בחו"ל
B – קבוצת העובדים שטיילו בחופשתם בחיק הטבע , $\bar{B}$ - קבוצת העובדים שלא טיילו בחופשתם בחיק הטבע.

נתון: $P(A) = p$, $P(A/B) = 0.2$, $P(B/A) = \frac{2}{9}$. צריך לחשב: $P(\bar{A}\cap\bar{B})$.

$$P(B/A) = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{P(B\cap A)}{p} = \frac{2}{9} \Rightarrow P(B\cap A) = \frac{2p}{9}$$

$$P(A/B) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0.2 \Rightarrow P(A\cap B) = 0.2P(B) \Rightarrow \frac{2p}{9} \Rightarrow P(B) = \frac{10p}{9}$$

	A	$\bar{A}$	
B	$\frac{2p}{9}$	$\frac{8p}{9}$	$\frac{10p}{9}$
$\bar{B}$	$\frac{7p}{9}$		$1-\frac{10p}{9}$
	p	1- p	1

מקבלים: $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1 - p - \frac{8p}{9} = \mathbf{1 - \frac{17p}{9}}$

ב. נתון: $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = \frac{3}{8}P(\bar{A}\cap B) \Rightarrow$. צריך לחשב $P(\bar{A}/\bar{B})$

$$1-\frac{17p}{9} = \frac{3}{8}\cdot\frac{8p}{9} \Rightarrow 1 = \frac{20p}{9} \Rightarrow p = 0.45 \Rightarrow$$

	A	$\bar{A}$	
B	0.1	0.4	0.5
$\bar{B}$	0.35	0.15	0.5
	0.45	0.55	1

מקבלים: $P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.15}{0.5} = \mathbf{0.3}$

ג. צריך לחשב: $2\cdot P(\bar{A}/B)\cdot P(A/B)$ (הראשון נפש בארץ והשני נפש בחו"ל או להיפך)

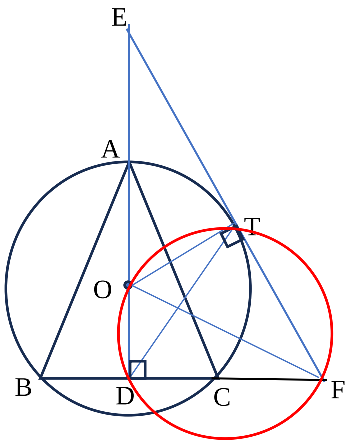
חישוב: $P(A/B) = 0.2$, $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$.

מקבלים: $2\cdot 0.2\cdot 0.8 = \mathbf{0.32}$

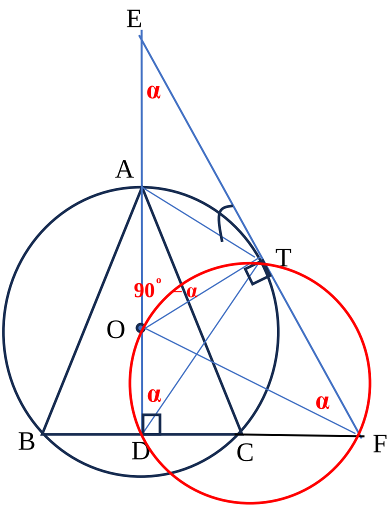
ד. ניעזר בנוסחת ברנולי: $n = 5$, $k = 1 , 2 , 3 , 4$, $p = P(\bar{A}/B) = 0.8$. מקבלים:

$$P = 1 - [p_5(0) + p_5(5)] = 1 - 0.2^5 - 0.8^5 = \frac{84}{125} = \mathbf{0.672}$$

<u>פתרון שאלה מס' 4</u>

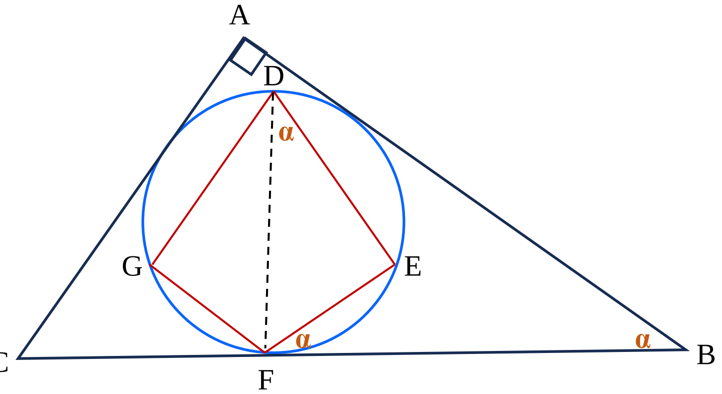


	טענה	נימוק
א.	מרכז המעגל O נמצא על האנך האמצעי למיתר BC	מרכז המעגל נמצא במפגש האנכים האמצעיים של המשולש
	$\Leftarrow AD \perp BC$	במשולש שווה-שוקיים , הגובה לבסיס הוא האנך האמצעי לבסיס לכן הנקודה O נמצאת עליו
ב.	$\sphericalangle ODF = 90^\circ$	הוכח
	$\sphericalangle OTF = 90^\circ$	רדיוס המעגל OT מאונך למשיק למעגל בנקודה T
	$\Leftarrow$ OTFD מרובע בר חסימה	מרובע בו סכום שתי הזוויות הנגדיות הוא 180° הנו מרובע בר חסימה
	$\Leftarrow \sphericalangle ODT = \sphericalangle OFT$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת במעגל החוסם את המרובע OTFD , שוות זו לזו
ג.	$\sphericalangle ODT = \alpha$ $\Rightarrow \sphericalangle OFT = \alpha$	נתון
(1	$ET = TF$ $OT \perp TF$	נתון הוכח
	$OE = OF$	OT גובה וגם תיכון לצלע EF לכן המשולש שווה-שוקיים
	$\Rightarrow \sphericalangle E = \sphericalangle OFT = \alpha$	זוויות בסיס שוות במשולש שווה-שוקיים
	$\Rightarrow \sphericalangle EOT = 90^\circ - \alpha$	סכום זוויות במשולש EOT
	$\Rightarrow \sphericalangle \mathbf{ATE} = \mathbf{45^o} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}$	זווית בין משיק למיתר שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על הקשת המתאימה למיתר
(2	רדיוס המעגל החוסם את המשולש ODF	מרכז המעגל החוסם משולש



	שווה למחצית היתר OF	ישר-זווית נמצא באמצע היתר
	$OF = OE = R + 0.84R = 1.84R$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 1.84R = \mathbf{0.92R}$	

פתרון שאלה מס' 5



א. BF משיק למעגל הנתון , לכן $\sphericalangle EFB = \sphericalangle FDE = \alpha$

(זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית

הנשענת על המיתר מצידו השני).

המרובע DEFG הנו דלתון , לכן $\sphericalangle DGF = \sphericalangle DEF$

(בדלתון, הזוויות שבצידי הציר המשני שוות זו לזו)

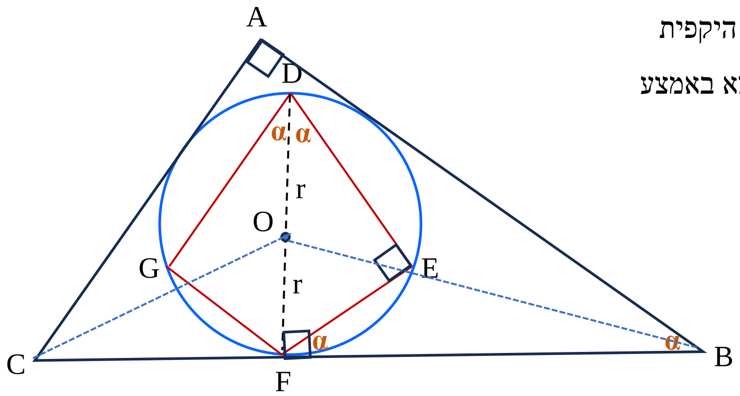
המרובע חסום במעגל , לכן

$\sphericalangle DGF + \sphericalangle DEF = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180°)

$\Rightarrow \sphericalangle DGF = \sphericalangle DEF = 90^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle DFE = 90^\circ - \alpha$ על פי סכום הזוויות במשולש DEF.

קיבלנו : $\boldsymbol{\sphericalangle FDE = \alpha}$, $\boldsymbol{\sphericalangle DEF = 90^o}$, $\boldsymbol{\sphericalangle DFE = 90^o - \alpha}$



ב. $\sphericalangle DEF = 90^\circ \Leftarrow$ DF הוא קוטר המעגל (זווית היקפית

ישרה נשענת על קוטר) . לכן, מרכז המעגל O נמצא באמצע

המיתר DF . נתון: $OF = OD = r$.

1) במשולש DEF :

$$\sin\alpha = \frac{FE}{2r}\ ,\ \cos\alpha = \frac{DE}{2r} \Rightarrow$$

$$FE = 2r\sin\alpha\ ,\ DE = 2r\cos\alpha$$

$$\Rightarrow S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2}\cdot 2r\sin\alpha\cdot 2r\cos\alpha = 2r^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = r^2\sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbf{S_{DEFG} = 2r^2 sin2\alpha}$$

2) הנקודה O היא מפגש חוצי הזוויות במשולש ABC , לכן OB ו- OC חוצים את הזוויות $\sphericalangle B$

וזווית $\sphericalangle C$ בהתאמה. $\sphericalangle B = \alpha\ ,\ \sphericalangle A = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle C = 90^\circ - \alpha$

$$\Rightarrow \sphericalangle OBF = \frac{\alpha}{2}\ ,\ \sphericalangle OCF = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sphericalangle BOC = 135^\circ$$

במשולש OBF : $OB = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Leftarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{OB}$.

במשולש OBC:

$$\frac{OB}{\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{BC}{\sin 135^\circ} \Rightarrow BC = \frac{\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin 135^\circ}{\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{2}r}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}$$

במשולש ABC :

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC\cdot\cos\alpha \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}r\cdot\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}r}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}\cdot\frac{\sqrt{2}r\cdot\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{2r^2\cos\alpha\sin\alpha}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \boldsymbol{\frac{r^2\sin 2\alpha}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}}$$

ג.

$$\frac{S_{DEFG}}{S_{\Delta ABC}} = 24.4294\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^4 \Rightarrow 2r^2\sin 2\alpha\cdot\frac{8\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{r^2\sin 2\alpha} = 24.4294\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^4 \Rightarrow$$

$$16\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 24.4294\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^4 \Rightarrow 16\sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 24.4294\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$4\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 4.9426\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

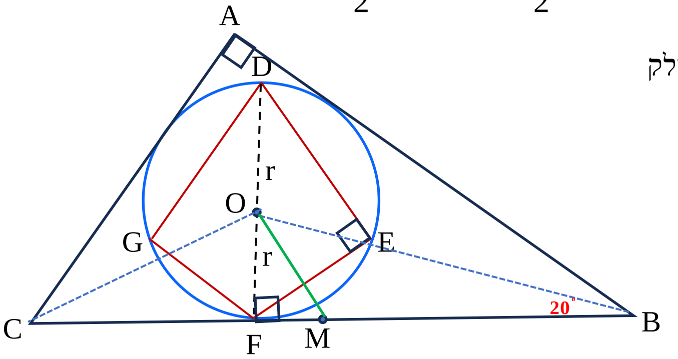
($\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) > 0$ כי ערכי הסינוס של זוויות חדות חיוביים)

$$\Rightarrow 4(\sin 45^\circ\cos\frac{\alpha}{2} - \cos 45^\circ\sin\frac{\alpha}{2}) = 4.9426\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 4.9426\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 7.7716\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ לכן אפשר לחלק

את שני האגפים ב- $\cos\frac{\alpha}{2}$. מקבלים:

$$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = 0.364 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 20^\circ \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 40^\circ}$$



ד. M מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC נמצא באמצע היתר BC . על פי סעיפים קודמים ,

עבור $\alpha = 40^\circ$ מקבלים:

$$BC = \frac{\sqrt{2}r}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{\sqrt{2}r}{2\sin(20^\circ)\sin(25^\circ)} = 4.89r$$

$$\Rightarrow MB = \frac{1}{2}\cdot 4.89r = 2.446r$$

$$OB = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin(20^\circ)} = 2.924r \, .$$

במשולש OBM :

$$OM^2 = (2.924r)^2 + (2.446r)^2 - 2\cdot 2.924r\cdot 2.446r\cdot\cos(20^\circ) = 1.091r^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{OM = 1.0446r}$$

פתרון שאלה מס' 6

א. 1) $x \geq 0$ וגם $2\sqrt{x} - a \neq 0 \Leftarrow \sqrt{x} \neq \frac{a}{2} \Leftarrow x \neq \frac{a^2}{4}$.

מקבלים: $\mathbf{0 \leq x < \frac{a^2}{4}, x > \frac{a^2}{4}}$

2) מציאת אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x : $2\sqrt{x} - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2}{4}$.

אסימפטוטה $\mathbf{x = \frac{a^2}{4}}$ $x \to \frac{a^2}{4} \Rightarrow f(x) \to \pm\infty \Rightarrow$

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y :

אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow$

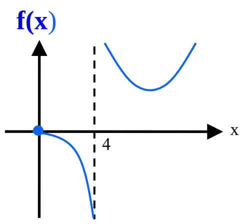
3) $$f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x} - a} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2\sqrt{x} - a) - x\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x} - a)^2} = \frac{2\sqrt{x} - a - \frac{x}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x} - a)^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - a - \sqrt{x}}{(2\sqrt{x} - a)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x} - a}{(2\sqrt{x} - a)^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = a \Rightarrow x = a^2$$

$$f(a^2) = \frac{a^2}{2a - a} = a$$

x	x <	0	< x <	$0.25a^2$	< x <	a^2	< x
f '(x)			-		-	0	+
f(x)		Max	↘		↘	min	↗

קיבלנו: **(0;0) מקסימום , $(a^2;a)$ מינימום** (4



ב. 1) הפונקציה g(x) היא הזזה אנכית ב k יחידות כלפי מטה (k > 0) של הפונקציה $|f(x)|$.

הפונקציה $|f(x)|$ מקיימת: $|f(x)| = f(x)$ בתחום $x > a^2$

ו- $|f(x)| = -f(x)$ בתחום: $0 \le x < a^2$.

נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מתקבלת בתחום בו $|f(x)| = f(x)$ ולכן, בתחום זה מתקיים

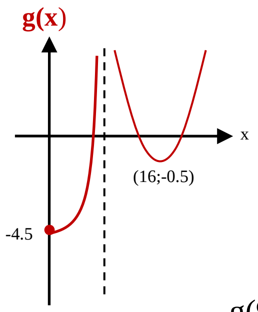
$g(x) = f(x) - k$. מתקיים $g'(x) = f'(x)$ לכן שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה

זהים. מקבלים: $a^2 = 16 \Leftarrow \mathbf{a = 4}$ $(a > 0)$. נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$

היא (16;4). בתחום $x > 4$ לכן $g(a^2) = a - k$, כלומר $g(16) = 4 - k \Leftarrow -0.5 = 4 - k$

$\Leftarrow$ **k = 4.5**

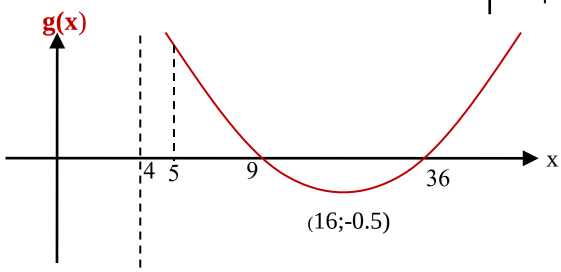
2) קיבלנו $g(x) = |f(x)| - 4.5$, לכן:



3) $f(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x} - 4}$

$g(2.838) = -f(2.838) - 4.5 =$

$= -\dfrac{2.838}{2\sqrt{2.838} - 4} - 4.5 = 0$



$g(9) = f(9) - 4.5 = \dfrac{9}{2 \cdot 3 - 4} - 4.5 = 0$.

$g(36) = f(36) - 4.5 = \dfrac{36}{2 \cdot 6 - 4} - 4.5 = 0$.

ג. הפונקציה $s(x) = \int_5^x g(t)dt$ המוגדרת בתחום $x > 5$

הפונקציה $g(t)$ מוגדרת לכל t בתחום $t > 4$.

הפונקציה $g(t)$ חיובית בתחומים $5 < t < 9$ ו- $t > 36$

ושלילית בתחום $9 < t < 36$. מקבלים:

x	5	< x <	9	< x <	36	< x
g(x)		+	0	-	0	+
s(x)		↗	Max	↘	min	↗

לכן, בתחום $x > 5$ יש לפונקציה $s(x)$ **נקודת מקסימום בנקודה שבה $x = 9$ ונקודת מינימום** בנקודה שבה $x = 36$.

פתרון שאלה מס' 7

א. 1) גרף הפונקציה $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות . בנקודה הקרובה יותר לציר ה- y
פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עוברת מחיוביות לשליליות, לכן , בנקודה זו יש לפונקציה $f(x)$ נקודת
מקסימום. בנקודת החיתוך השנייה עם ציר ה- x , פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עוברת משליליות לחיוביות
לכן , בנקודה זו יש לפונקציה $f(x)$ נקודת מינימום.

לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון בתחום $0 \le x \le 0.5\pi$.

2) לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון , לכן,
לפונקציה $f(x)$ **אין נקודות פיתול בתחום $0 \le x \le 0.5\pi$**

ב. 1) הפונקציה $f(x) = ax - 3\tan(2x)$ $\Leftarrow$ $f(x) = ax - \frac{3\sin(2x)}{\cos(2x)}$ לא מוגדת עבור $\cos(2x) = 0$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} 0$$

בתחום $0 \le x \le 0.5\pi$ הפונקציה לא מוגדרת בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$. $3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) \ne 0$

לכן הישר $\mathbf{x = \frac{\pi}{4}}$ הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה $f(x)$

2) לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון בתחום הנתון, לכן, למשוואה $f'(x) = 0$ יש לפחות שני פתרונות
בתחום $0 \le x \le 0.5\pi$.

$$f(x) = ax - 3\tan(2x) \Rightarrow f'(x) = a - 3\cdot\frac{2}{\cos^2(2x)} = a - \frac{6}{\cos^2(2x)} = 0 \Rightarrow$$

$$.\ a = \frac{6}{\cos^2(2x)} \Rightarrow \cos^2(2x) = \frac{6}{a}$$

$0 \le \cos^2(2x) \le 1$ לכל ערך של x , לכן $0 \le \frac{6}{a} \le 1 \Rightarrow a > 0$ וגם $\frac{6}{a} \le 1 \Rightarrow a \ge 6$.

מקבלים : $\mathbf{a \ge 6}$

3) $\left(\cos(0)\right)^2 = 1^2 = 1,\ \left(\cos(\pi)\right)^2 = (-1)^2 = 1$

$$f'(x) = a - \frac{6}{\cos^2(2x)} \Rightarrow \mathbf{f'(0) = f'(0.5\pi) = a - 6}$$

4) $$f'(x) = a - \frac{6}{\cos^2(2x)} \Rightarrow f''(x) = -\frac{-6\cdot 2\cos(2x)\cdot(-\sin(2x))\cdot 2}{\cos^4(2x)} =$$

$$= -\frac{24\cos(2x)\cdot\sin(2x)}{\cos^4(2x)} \Rightarrow f''(x) = -\frac{12\sin(4x)}{\cos^4(2x)} = 0 \Rightarrow \sin(4x) = 0 \Rightarrow$$

$x=\frac{\pi k}{4}$ ⇐ $4x=\pi k$. פתרונות המשוואה בתחום $0\le x\le 0.5\pi$ הם : $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{4}$, $x=0$.

הנקודות בהן $x=0$ ו- $x=\frac{\pi}{2}$ הן נקודות קצה של הפונקציה $f(x)$ ובנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$

הפונקציה איננה מוגדרת , לכן, אין לה נקודות פיתול בתחום הנתון.

ג. המספר m מייצג את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$, כלומר, את ערך הנגזרת של הפונקציה .

נתון $m\le 18$ לכן הערך המקסימלי של הנגזרת הוא 18. על סמך גרף פונקציית הנגזרת , הערך

המקסימלי מתקבל בנקודות הקצה בהן $x=0$ ו- $x=0.5\pi$ שבהן ערך הנגזרת הוא $a-6$.

מקבלים: $a-6=18 \Rightarrow \mathbf{a=24}$.

ד. 1) $f(x)=24-3\tan(2x)$, $f'(x)=24-\frac{6}{\cos^2(2x)}=0\Rightarrow \cos^2(2x)=\frac{1}{4}\Rightarrow$

$$\text{I. } \cos(2x)=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$$

$$\text{II. } \cos(2x)=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$$

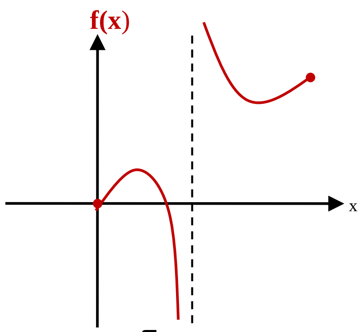
הפתרונות בתחום $0\le x\le 0.5$ הם $x=\frac{\pi}{6}$ ו- $x=\frac{\pi}{3}$.

x	0	$<x<$	$\frac{\pi}{6}$	$<x<$	$\frac{\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{\pi}{3}$	$<x<$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$	min	↗	Max	↘		↘	min	↗	Max

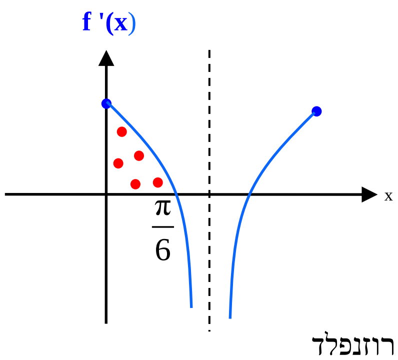
קיבלנו: $f(0)=0, f(\frac{\pi}{6})=7.37, f(\frac{\pi}{3})=30.33, f(\frac{\pi}{2})=37.7$.

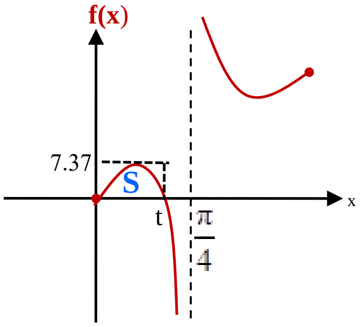
מינימום $(0;0)$, מקסימום $(\frac{\pi}{6};7.37)$, מינימום $(\frac{\pi}{3};30.33)$, מקסימום $(\frac{\pi}{2};37.7)$

2)



3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f'(x)dx=f(\frac{\pi}{6})-f(0)=\mathbf{7.37}$.



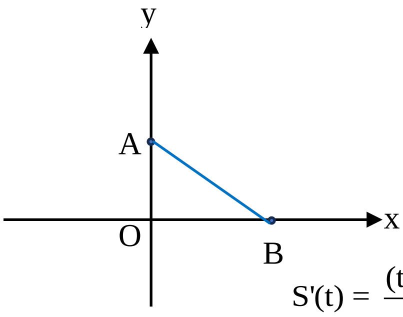


ה. נסמן ב- t את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של הפונקציה f(x) עם ציר x . השטח S גדול משטח המשולש שבסיסו t וגובהו 7.37.

לכן $\frac{7.37t}{2} < 2.6 \Rightarrow t < 0.71$

מסקנה : **לא יתכן** שגרף הפונקציה f(x) חותך את ציר ה- x בנקודה (0.75;0)

פתרון שאלה מס' 8



א. נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{t}\cdot 0 + \frac{1}{t+1} = \frac{1}{t+1} \Rightarrow A(0;\frac{1}{t+1})$.

נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x :

$$0 = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t+1} \Rightarrow \frac{1}{t}x = \frac{1}{t+1} \Rightarrow x = \frac{t}{t+1} \Rightarrow B(\frac{t}{t+1};0)$$

שטח המשולש AOB :

$$S(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}\cdot\frac{t}{t+1} = \frac{t}{2(t+1)^2}$$

$$S'(t) = \frac{2(t+1)^2 - t\cdot 4(t+1)}{4(t+1)^4} = \frac{(t+1)\left[2(t+1) - 4t\right]}{4(t+1)^4} \Rightarrow$$

$$S'(t) = \frac{(t+1)(2-2t)}{4(t+1)^4} = 0 \Rightarrow (t+1)(2-2t) = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ , } t = 1. \ t > 0 \ \Rightarrow t = 1$$

x	0	< x <	1	< x
S'(x)		+	0	-
S(x)		↗	Max	↘

שטח המשולש AOB מקסימלי עבור **t = 1**.

ב. 1) עבור t = 1 משוואת המשיק לגרף הפונקציה f(x) הוא הישר $y = -x + \frac{1}{2}$. שיפוע המשיק הוא 1 – , לכן נמצא את שיעור ה- x של הנקודה על גרף הפונקציה f(x) שבה ערך הנגזרת הוא 1 - :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + b \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

הישר $y = -x + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה f(x) בנקודה שבה x = 1 . שיעור ה- y של הנקודה הוא $y = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (1;-\frac{1}{2})$. הנקודה $(1;-\frac{1}{2})$ היא נקודה על הפונקציה f(x) ולכן:

$$-\frac{1}{2} = \frac{1^3}{3} - 1^2 + b \Rightarrow \mathbf{b = \frac{1}{6}}$$

2) קיבלנו $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{6}$. אוסף שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה מיוצג על-ידי הנגזרת $f'(x)$. נמצא את נקודת המינימום המוחלט של פונקציית הנגזרת.

$f'(x) = x^2 - 2x$: נסמן $m(x) = x^2 - 2x$ ונקבל:

$m'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1,\ m''(x) = 2 \Rightarrow$

לפונקציה $m(x)$ יש נקודת מינימום עבור $x = 1$. $m(1) = -1$

x	0	< x <	1	< x
m'(x)		-	0	+
m(x)		↘	min	↗

הנקודה (1;-1) היא המינימום המוחלט של הפונקציה $m(x) = f'(x)$, כלומר, השיפוע המינימלי של משיק כלשהו לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1 - .

3) $g(x) = \int_0^x f''(r)dr = \left[f'(r)\right]_0^x = f'(x) - f'(0) = x^2 - 2x - 0 = x^2 - 2x$

$g(x) = f'(x)$ ולפי סעיפים קודמים , המינימום המוחלט של $f'(x)$ הוא 1 – והוא מתקבל עבור $x = 1$:

$g'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1,\ g''(x) = 2 \Rightarrow$

לפונקציה $g(x)$ יש נקודת **מינימום מוחלט** בנקודה **(1;-1)**

מבחן מס' 2

פתרון שאלה מס' 1

א. נסמן: x קמ"ש– מהירות הרוח , 5x קמ"ש – המהירות העצמית של המטוס ,
y ק"מ– המרחק בין A ל- B

		מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
מטוס כרגיל	הלוך נגד הרוח	4x	$\frac{y}{4x}$	y
	חזור בכיוון הרוח	6x	$\frac{y}{6x}$	y

מקבלים:

$$\frac{y}{4x}+\frac{y}{6x}=12.5\Rightarrow\frac{3y+2y}{12x}=12.5\Rightarrow 5y=150x\Rightarrow y=30x\Rightarrow\frac{y}{4x}=\frac{30x}{4x}=7.5$$

זמן הטיסה הלך הוא 7.5 שעות , לכן, המטוס הגיע לנקודה B בשעה $\mathbf{13^{30}}$.

ב.

		מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
מטוס לו גדלה הרוח	הלוך נגד הרוח	5x - (x+30)	$\frac{30x}{4x-30}$	30x
	חזור בכיוון הרוח	5x + (x+3)	$\frac{30\text{ס}}{6x+30}$	30x

מקבלים :

$$\frac{30x}{4x-30}+\frac{30x}{6x+30}=13.5\Rightarrow 30x(6x+30)+30x(4x-30)=13.5(4x-30)(6x+30)\Rightarrow$$

$$30x(6x+30+4x-30)=13.5\cdot 4(2x-15)(3x+15)\Rightarrow 30x(10x)=54(6x^2-15x-225)\Rightarrow$$

$$30x(10x)=54(6x^2-15x-225)\Rightarrow 50x^2=9(6x^2-15x-225)\Rightarrow 4x^2-135x-2025=0$$

$\Rightarrow x=45\Rightarrow$ **מהירות הרוח היא 45 קמ"ש והמהירות העצמית של המטוס היא 225 קמ"ש**

ג. המטוס יוצא חזרה מנקודה B בשעה 13^{30} , לכן , בשעה 16^{30} היה בדרכו חזרה וטס בכיוון הרוח.
המסוק יוצא אף הוא מנקודה B בשעה 12^{00} . נסמן את המהירות העצמית של המסוק ב- v . מקבלים:

		מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
מטוס בדרכו חזרה מ-B ל- A	בכיוון הרוח	225 + 45	3	810
המסוק בדרכו מ- B ל- A	בכיוון הרוח	v + 45	4.5	4.5(v + 45)

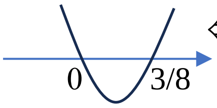
$$4.5(v+45)=810\Rightarrow v+45=180\Rightarrow v=135\Rightarrow$$

המהירות העצמית של המסוק היא 135 קמ"ש

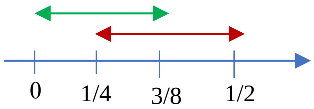
פתרון שאלה מס' 2

א. הסדרה מתכנסת ועולה , לכן : $a_1<0$ וגם $0<q<1$. מקבלים:

$\Leftarrow x(8x-3)<0 \Leftarrow 8x^2-3x<0$ וגם $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2} \Leftarrow 1<4x<2 \Leftarrow 0<4x-1<1 \Leftarrow$



תחום השליליות: $0<x<\frac{3}{8}$. מקבלים:



$\mathbf{\frac{1}{4}<x<\frac{3}{8}}$

ב. 1) נתון: $.\mathbf{q=\frac{1}{4}} \Leftarrow 4-4q=3 \Leftarrow \frac{1}{1-q}=\frac{4}{3} \Leftarrow \frac{a_1}{1-q}=\frac{4}{3}a_1 \Leftarrow S=\frac{4}{3}a_1$

2) $.q=\frac{1}{4} \Rightarrow 4x-1=\frac{1}{4} \Rightarrow 4x=\frac{5}{4} \Rightarrow x=\frac{5}{16}$

$a_1=8x^2-3x \Rightarrow a_1=8\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^2-3\cdot\left(\frac{5}{16}\right) \Rightarrow \mathbf{a_1=-\frac{5}{32}}$

ג. הסדרה $b_1,b_2,b_3....$ הנדסית שאינה עולה ואינה יורדת , לכן , מנתה שלילית. נסמן את מנת הסדרה ב- Q . נתון: $\mathbf{Q=-2} \Leftarrow Q^4=16 \Leftarrow -\frac{5}{32}\cdot 64\cdot Q^4=-160 \Leftarrow a_1\cdot b_5=-160\ ,\ b_1=64$

ד. 1) הסדרה $c_1,c_2,c_3....$ מקיימת: $.c_n=a_nb_n \Rightarrow c_{n+1}=a_{n+1}b_{n+1}$

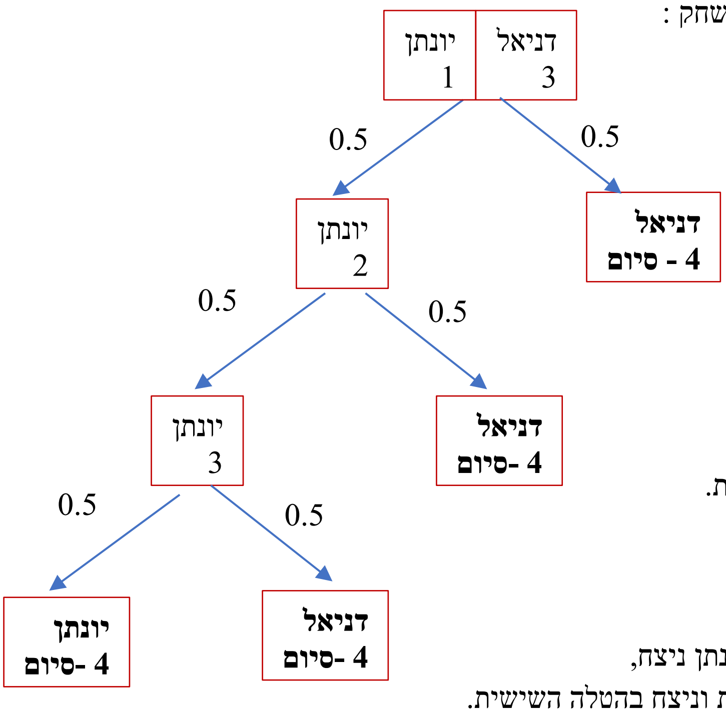
מקבלים : $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n}=q\cdot Q=\frac{1}{4}\cdot(-2)=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

הסדרה $c_1,c_2,c_3....$ היא **סדרה הנדסית** , מנתה $-\frac{1}{2}$, לכן היא **מתכנסת**.

2) $S=\frac{-10}{1+\frac{1}{2}}=\mathbf{-6\frac{2}{3}} \Leftarrow c_1=a_1b_1=-\frac{5}{32}\cdot 64=-10$

פתרון שאלה מס' 3

א. 1) בכל הטלת קובייה , הסיכוי של דניאל לנצח וגם הסיכוי של יונתן לנצח הוא 0.5 .
האפשרויות לאחר שדניאל ניצח 3 פעמים ויונתן ניצח פעם אחת :



ההסתברות שדניאל יזכה בשוקולד אילו נמשך המשחק :

$$0.5+0.5^2+0.5^3=\mathbf{\frac{7}{8}}$$

2) ההסתברות שיונתן יזכה בשוקולד אילו נמשך המשחק :

$$\frac{1}{8}=0.5^3 \Leftarrow \text{ההסתברות שיונתן יזכה}$$

בחפיסת השוקולד בתום המשחק גדולה **פי 7** מן ההסתברות שיונתן יזכה בה

3) עליהם לחלק את 32 קוביות השוקולד ביחס 7:1 כך שיונתן יקבל x קוביות ודניאל יקבל 7x קוביות.
$8x = 32 \Leftarrow x = 4$. לכן:
יונתן יקבל 4 קוביות , דניאל יקבל 28 קוביות

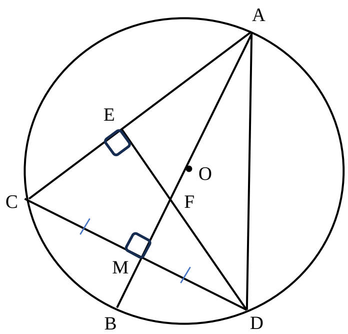
ב. 1) אם המשחק הסתיים כעבור 6 הטלות קובייה ויונתן ניצח, הרי שהוא ניצח ב- 3 מחמש ההטלות הראשונות וניצח בהטלה השישית.
מקבלים :

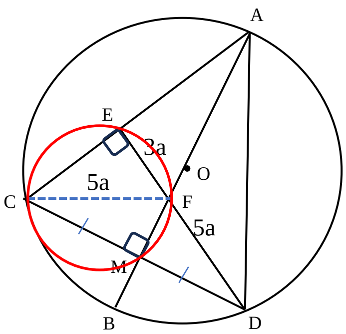
$$P=\binom{5}{3}0.5^3\cdot0.5^2\cdot0.5=\mathbf{\frac{5}{32}}=\mathbf{0.15625}$$

2) התנאי: יונתן זכה במשחק אחרי 6 הטלות קובייה. הדרישה: זכה בשלוש ההטלות הראשונות רצופות מבין חמש ההטלות הראשונות. היות וידוע שהוא זכה בהטלה השישית. הרי שבחמש ההטלות הראשונות הוא זכה : בשלוש ההטלות הראשונות , בשלוש ההטלות: השנייה, השלישית והרביעית או השלישית , הרביעית , החמישית והשישית. כלומר: שלוש אפשרויות לקבל 4 פעמים מספר אי-זוגי

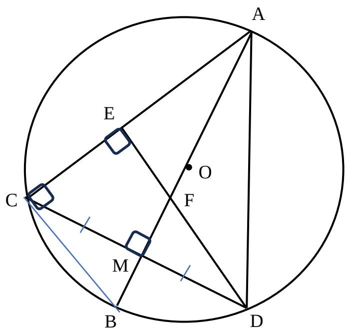
$$P=\frac{3\cdot0.5^4\cdot0.5^2}{\frac{5}{32}}=\frac{3\cdot0.5^6}{10\cdot0.5^6}=\mathbf{0.3}$$

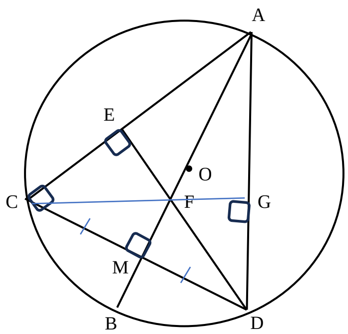
פתרון שאלה מס' 4





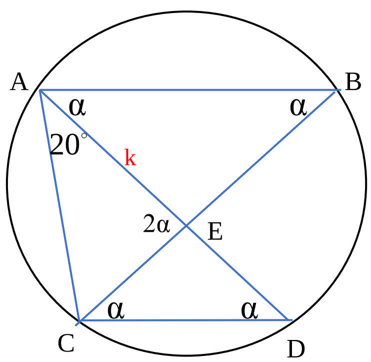
	טענה	נימוק
א	$DE \perp AC$	נתון
	$\Rightarrow \measuredangle CED = 90^\circ$	
	$CM = MD$	נתון
	$\Rightarrow \measuredangle AMC = 90^\circ$	קטע המחבר אמצע של מיתר עם מרכז המעגל , מאונך למיתר
	$\Leftarrow$ CEFM מרובע בר חסימה	מרובע בעל זוג זוויות נגדיות שסכומן 180° הנו בר חסימה
ב	$EF = 3a\ ,\ FD = 5a$	נתון
(1	$CF = FD = 5a$	במשולש CFD הקטע FM הנו גובה וגם תיכון לצלע CD לכן המשולש שווה-שוקיים
	CF קוטר המעגל החוסם את המרובע CEFM	מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר
	$r = \frac{5a}{2} = \mathbf{2.5a} \Leftarrow$	
(2	$CE^2 = CF^2 - EF^2$	משפט פיתגורס במשולש CEF
	$CE = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2}$ $= \sqrt{16a^2} = 4a$	
	$\Rightarrow S_{\Delta CED} = \frac{8a \cdot 4a}{2} = \mathbf{16a^2}$	חישוב על פי נוסחת שטח משולש
(3	$CD^2 = CE^2 - ED^2$	משפט פיתגורס במשולש CFD
	$\Rightarrow CD = \sqrt{(4a)^2 + (8a)^2}$ $= \sqrt{80a^2} \Rightarrow \mathbf{CD = 4\sqrt{5}a}$	
ג	$\measuredangle C = \measuredangle C$	זווית משותפת
(1	$\measuredangle CED = \measuredangle AMC = 90^\circ$	הוכח
	$\Rightarrow \Delta ECD \sim \Delta MCA$	משפט דמיון ז.ז.
(2	$MC = \frac{1}{2} CD = 2\sqrt{5}a$	הוכח
	$\frac{EC}{MC} = \frac{4a}{2\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים
	$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ECD}}{S_{\Delta MCA}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הצלעות המתאימות
	$\Rightarrow \frac{16a^2}{S_{\Delta MCA}} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{\Delta MCA} = 20a^2$	חישוב
	$\Rightarrow S_{\Delta ACD} = 2 \cdot 20a^2 = \mathbf{40a^2}$	





(3	$40a^2=1800 \Rightarrow a^2=45 \Rightarrow a=3\sqrt{5}$	חישוב
	$\frac{AC\cdot DE}{2}=1800, DE=8a=24\sqrt{5}$ $\Rightarrow AC\cdot 24\sqrt{5}=3600 \Rightarrow \mathbf{AC=30\sqrt{5}}$	חישוב
(4	$\sphericalangle ACB=90^\circ$ $\Rightarrow \sphericalangle ACB=\sphericalangle CED$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה
	$\sphericalangle CBA=\sphericalangle CDA$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו
	$\sphericalangle CDA=\sphericalangle DCA$	זוויות הבסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו
	$\sphericalangle CBA=\sphericalangle DCA$	כלל המעבר
	$\Rightarrow \Delta ACB \sim \Delta DEC$	משפט דמיון ז.ז.
	$\Rightarrow \frac{AC}{DE}=\frac{CB}{EC}=\frac{AB}{DC}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים
	$DC=4\sqrt{5}\cdot a=60 \Rightarrow \frac{30\sqrt{5}}{24\sqrt{5}}=\frac{AB}{60}$ $\Rightarrow \frac{5}{4}=\frac{AB}{60} \Rightarrow AB=75$ $\Rightarrow R=\frac{75}{2}=\mathbf{37.5}$	
ד	הנקודה F היא מפגש הגבהים במשולש ACD	הוכח
	$\sphericalangle CGD=90^\circ$	שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת לכן CG גובה לצלע AD
	CD קוטר המעגל החוסם את המשולש CED וגם קוטר המעגל החוסם את המשולש CGD	מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה היא קוטר
	⇐ הנקודות C, E, G ו- D נמצאות על אותו מעגל	

פתרון שאלה מס' 5



א. 1) $\mathbf{\sphericalangle CAD=20^\circ}$ (נתון)

$AB \parallel CD$, $\sphericalangle BAD=\alpha \Leftarrow \sphericalangle ADC=\alpha$ (ישרים מקבילים יוצרים זוויות מתחלפות שווה)

$\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCD=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC=\alpha$ (זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו)

$\Leftarrow \mathbf{\sphericalangle AEC=2\alpha}$ (זווית חיצונית למשולש CED שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה)

$\Leftarrow \mathbf{\sphericalangle ACE=160^\circ-2\alpha}$ (סכום זוויות במשולש)

2) במשולש ABE :

$$\sphericalangle AEB = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \frac{k}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow \mathbf{AB = \frac{k\sin(2\alpha)}{\sin\alpha}}$$

במשולש ACE :

$$\frac{CE}{\sin 20^\circ} = \frac{k}{\sin(160^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow CE = \frac{k\cdot\sin 20^\circ}{\sin(160^\circ - 2\alpha)}$$

במשולש ECD :

$$\frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{CD}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow CD = CE\cdot\frac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{k\cdot\sin 20^\circ}{\sin(160^\circ - 2\alpha)}\cdot\frac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{k\sin 20^\circ\sin(2\alpha)}{\sin(160^\circ - 2\alpha)\sin\alpha} = \frac{k\sin 20^\circ\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(160^\circ - 2\alpha)\sin\alpha} \Rightarrow \mathbf{CD = \frac{2k\cdot\sin 20^\circ\cos\alpha}{\sin(160^\circ - 2\alpha)}}$$

ב. נתון : $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta DCE}} = 6.41147$. $AB \parallel CD \Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta DCE \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta DCE}} = \left(\frac{AB}{DC}\right)^2 = 6.41147$

(יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הצלעות המתאימות)

$$\Rightarrow \frac{AB}{DC} = 2.532 \Rightarrow \frac{k\sin(2\alpha)}{\sin\alpha} : \frac{k\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin(2\alpha)}{\sin(160^\circ - 2\alpha)\cdot\sin\alpha} = 2.532 \Rightarrow$$

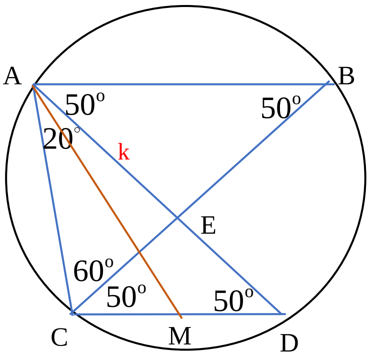
$$\frac{k\sin(2\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(160^\circ - 2\alpha)\cdot\sin\alpha}{k\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin(2\alpha)} = 2.532 \Rightarrow \frac{\sin(160^\circ - 2\alpha)}{\sin 20^\circ} = 2.532 \Rightarrow$$

$$\sin(160^\circ - 2\alpha) = 0.866 \Rightarrow 160^\circ - 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow 2\alpha = 100^\circ \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 50^\circ}$$

או: $160^\circ - 2\alpha = 120^\circ \Rightarrow 2\alpha = 40^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$

פתרון זה נפסל כי $\alpha > 20^\circ$.

ג. AM תיכון לצלע CD במשולש ACD.



$$CD = \frac{k\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 100^\circ}{\sin 60^\circ\cdot\sin 50^\circ} = 0.5077k \Rightarrow CM = 0.254k$$

במשולש ABC :

$$AB = \frac{k\sin 100^\circ}{\sin 50^\circ} = 1.2856k \Rightarrow \frac{AC}{\sin 50^\circ} = \frac{1.2856k}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = 1.1372k$$

במשולש ACM:

$$CM^2 = (1.1372k)^2 + (0.254k)^2 - 2\cdot 1.1372k\cdot 0.254k\cdot\cos 110^\circ$$

$$\Rightarrow (22.44)^2 = 1.55487k^2 \Rightarrow 1.247k = 22.44 \Rightarrow \mathbf{k \approx 18}$$

:

פתרון שאלה מס' 6

א. 1) הפונקציה $f'(x)$ מוגדרת לכל ערך של x , לכן מתקיים : $x^2-10x+c>0$ לכל ערך של x .

לכן , הפונקציה $y=x^2-10x+c$ נמצא כולו מעל ציר ה- x ואין פתרון למשוואה

$x^2-10x+c=0$. לכן מתקיים $10^2-4c<0 \Leftarrow$ $\mathbf{c>25}$

2) $f'(x)=0 \Rightarrow 3x-15=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow \mathbf{(5;0)}$, $f'(0)=\frac{-15}{\sqrt{c}} \Rightarrow \mathbf{(0;\frac{-15}{\sqrt{c}})}$

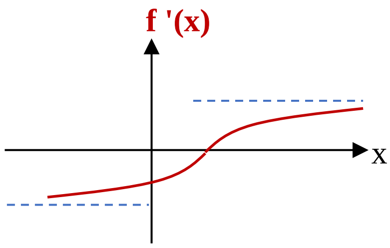
3) הפונקציה $f'(x)$ מוגדרת לכל x לכן אין אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x.

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y :

$$x\to\infty \Rightarrow f'(x) \to = \frac{3x}{\sqrt{x^2}} \to \frac{3x}{x} \to 3 \Rightarrow \mathbf{y=3}$$

$$x\to-\infty \Rightarrow f'(x) \to = \frac{3x}{\sqrt{x^2}} \to \frac{3x}{-x} \to -3 \Rightarrow \mathbf{y=-3} .$$

(4



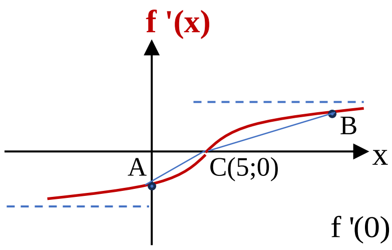
ב. לפי הנתון מתקיים: $f'(0)=-\frac{15}{11} \Leftarrow \frac{-15}{\sqrt{c}}=-\frac{15}{11} \Leftarrow \mathbf{c=121}$

ג. 1) נסמן ב $C(5;0)$ את נקודת הפיתול של הפונקציה $f'(x)$.

הפונקציה $f'(x)$ קעורה כלפי מעלה בתחום $x<5$ וקעורה

כלפי מטה בתחום $x>5$. לכן , סכום הקטעים AC ו- CB

קצרים מאורך המסלול על גרף הפונקציה מנקודה A לנקודה B.



נחשב: $f'(0)=\frac{-15}{11} \Rightarrow A(0;\frac{-15}{11}), f'(15)=\frac{30}{\sqrt{196}}=\frac{15}{7} \Rightarrow B(15;\frac{15}{7})$

מקבלים : $AC=\sqrt{\left(-\frac{5}{11}\right)^2+5^2}=\frac{5\sqrt{122}}{11}, CB=\sqrt{10^2+\left(\frac{15}{7}\right)^2}=\frac{5\sqrt{205}}{7} \Rightarrow$

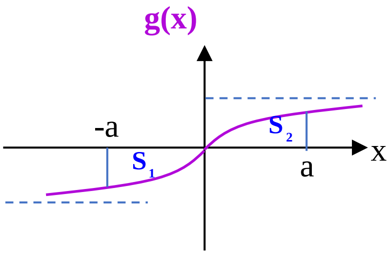
$AC+CB\approx15.25$. $L>AC+CB$ לכן $\mathbf{L>15.2}$

ד. $f'(x)=\frac{3x-15}{\sqrt{x^2-10x+121}}$, $g(x)=f'(x+5) \Rightarrow g(x)=\frac{3(x+5)-15}{\sqrt{(x+5)^2-10(x+5)+121}}=$

$$= \frac{3x}{\sqrt{x^2+10x+25-10x-50+121}} \Rightarrow g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+96}}$$

נראה שהפונקציה $g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית:

$$g(-x) = \frac{3(-x)}{\sqrt{(-x)^2+96}} = \frac{-3x}{\sqrt{x^2+96}} = -g(x).$$



גרף הפונקציה סימטרי ביחס לראשית הצירים

(הזזה של הפונקציה $f'(x)$ חמש יחידות שמאלה):

לכן , השטחים המסומנים בציור שווים ומתקיים:

$$\int_{-a}^{0} g(x)dx = -\int_{0}^{a} g(x)dx \Rightarrow \int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$$

פתרון שאלה מס' 7

א. 1) תחום ההגדרה: $\sin^n x \neq 0 \Leftarrow \sin x \neq 0 \Leftarrow x \neq \pi k$. בתחום $-\pi \le x \le \pi$ מקבלים:
$x \neq \pi$, $x \neq 0$, $x \neq -\pi$. תחום ההגדרה הוא: $\mathbf{-\pi < x < 0\,,\,0 < x < \pi}$

2) אין אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y בתחום $-\pi \le x \le \pi$.
אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x : $\mathbf{x = -\pi\,,\,x = 0\,,\,x = \pi}$

3) הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$ לכן , אין לה נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
נקודות חיתוך עם ציר ה- x : $\frac{\cos x}{\sin^n x} = 0 \Leftarrow \cos x = 0 \Leftarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.
הפתרונות בתחום ההגדרה: $\mathbf{\left(-\frac{\pi}{2};0\right),\left(\frac{\pi}{2};0\right)}$

ב. 1) <u>עבור n זוגי</u>:

$\sin^n x > 0 \Leftarrow$ הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^n x}$ חיובית בתחומים בהם $\cos x$ חיובית ושלילית בתחומים בהם $\cos x$ שלילית:

תחומי החיוביות: $\mathbf{-\frac{\pi}{2} < x < 0\,,\,0 < x < \frac{\pi}{2}}$ **, תחומי השליליות:** $\mathbf{-\pi < x < -\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2} < x < \pi}$

<u>עבור n אי-זוגי</u>:

x	-π	-π < x < -0.5π	-0.5π	-0.5π < x < 0	0	0 < x < 0.5π	0.5π	o.5π<x < π	π
cosx		-	0	+		+	0	-	
$\sin^n x$		-	-	-		+	+	+	
f(x)		+	0	-		+	0	-	

תחומי החיוביות : $-\pi < x < -0.5\pi \,,\, 0 < x < 0.5\pi$

תחומי השליליות: $-0.5\pi < x < 0 \,,\, 0.5\pi < x < \pi$

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^n x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-\sin x \cdot \sin^n x - \cos x \cdot n \cdot \sin^{n-1}x \cdot \cos x}{\sin^n x} \Rightarrow$

$f'(x) = \dfrac{-\sin^{n-1}x(\sin^2 x + n\cdot\cos^2 x)}{\left(\sin^n x\right)^2} = 0 \Rightarrow \sin^{n-1}x = 0$ או $\sin^2 x + n\cdot\cos^2 x$.

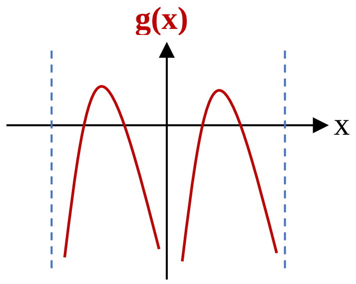
$\sin x \neq 0$ בתחום ההגדרה של הפונקציה לכן אין פתרון למשוואה $\sin^{n-1}x = 0$.

מתקיים גם : $\cos^2 x \geq 0 \,,\, n > 0 \,,\, \sin^2 x > 0$ לכן $\sin^2 x + n\cdot\cos^2 x > 0$

ואין פתרון למשוואה $\sin^2 x + n\cdot\cos^2 x = 0$. מסקנה: אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון פנימיות.

הפונקציה איננה מוגדרת בנקודות בהן $x = -\pi$ ו- $x = \pi$ לכן אין לפונקציה נקודות קצה.

ג. על פי הגרף של $g(x)$ יש לפונקציה שתי נקודות מקסימום.



שיעורי ה- x של הנקודות תואמות את שיעורי ה- x של

נקודות האפס של הפונקציה $f(x) = g'(x)$: $x = -\dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{\pi}{2}$.

מקבלים:

x	$-\pi$	$-\pi < x < -0.5\pi$	-0.5π	$-0.5\pi < x < 0$	0	$0 < x < 0.5\pi$	0.5π	$0.5\pi < x < \pi$	π
g(x)		↗	max	↘		↗	max	↘	
g'(x)		+	0	-		+	0	-	

תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g'(x) = f(x)$ תואמים את תחומי החיוביות והשליליות

שהתקבלו עבור **n אי- זוגי**

ד. הישר $y = 4\sqrt{3}$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \dfrac{\pi}{6}$, לכן מתקיים

$f(\dfrac{\pi}{6}) = 4\sqrt{3}$. מקבלים:

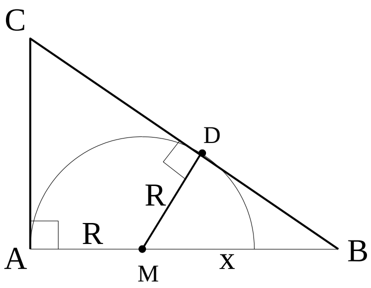
$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin^n x}\Rightarrow\frac{\cos(\frac{\pi}{6})}{\left[\sin(\frac{\pi}{6})\right]^n}=4\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left[\frac{1}{2}\right]^n}=4\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2^n}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}=\frac{4}{2^n}\Rightarrow 2^n=8\Rightarrow \mathbf{n=3}$$

פתרון שאלה מס' 8

א. במשולש ישר- זווית BMD :

$BD=\sqrt{x^2-R^2}$.



$$\Delta BDM\sim\Delta BAC\Rightarrow\frac{BD}{BA}=\frac{DM}{AC}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x^2-R^2}}{x+R}=\frac{R}{AC}\Rightarrow AC=\frac{R(x+R)}{\sqrt{x^2-R^2}}\Rightarrow$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R(x+R)}{\sqrt{x^2-R^2}}\cdot(x+R)=\frac{R(x+R)^2}{2\sqrt{x^2-R^2}}$$

נמצא את נקודת המקסימום של הפונקציה $S(x)=\frac{R(x+R)^2}{2\sqrt{x^2-R^2}}$ שתחום הגדרתה $x^2-R^2>0$

וגם $x>0$, כלומר, $x>R$.

$$S'(x)=\frac{2R(x+R)\cdot2\sqrt{x^2-R^2}-R(x+R)^2\cdot2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-R^2}}}{4\left(\sqrt{x^2-R^2}\right)^2}=$$

$$S'(x)=\frac{4R(x+R)\sqrt{x^2-R^2}-\frac{2Rx(x+R)^2}{\sqrt{x^2-R^2}}}{4\left(\sqrt{x^2-R^2}\right)^2}=\frac{4R(x+R)(x^2-R^2)-2Rx(x+R)^2}{4\left(\sqrt{x^2-R^2}\right)^3}=$$

$$\frac{2R(x+R)\left[2(x^2-R^2)-x(x+R)\right]}{4\left(\sqrt{x^2-R^2}\right)^3}=\frac{R(x+R)\left[2x^2-2R^2-x^2-xR\right]}{2\left(\sqrt{x^2-R^2}\right)^3}\Rightarrow$$

$$S'(x)=\frac{R(x+R)\left(x^2-xR-2R^2\right)}{2\left(\sqrt{x^2-R^2}\right)^3}=0\Rightarrow R(x+R)\left(x^2-xR-2R^2\right)=0$$

לא בתחום ההגדרה $\Rightarrow x=-R$

$$\Rightarrow x^2-xR-2R^2=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{R\pm\sqrt{R^2+8R^2}}{2}=\frac{R\pm 3R}{2}\Rightarrow$$

$x=-R$, $x=2R$. הפתרון היחיד בתחום ההגדרה הוא $x=2R$.

נבדוק את סוג הקיצון:

x	0	< x <	2R	< x
S'(x)		-	0	+
S(x)		↘	min	↗

מקבלים : שטח המשולש ABC מינימלי עבור **x = 2R**

ב. עבור $x=2R$ מקבלים:

$$BD=\sqrt{4R^2-R^2}=\sqrt{3R^2}=\sqrt{3}R$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{R(2R+R)^2}{2\sqrt{4R^2-R^2}}=\frac{9R^3}{2\sqrt{3}R}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}\quad,\quad S_{\Delta BDM}=\frac{R\sqrt{3}R}{2}=\frac{\sqrt{3}R^2}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ACDM}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}-\frac{\sqrt{3}R^2}{2}=\sqrt{3}R^2=25\sqrt{3}\Rightarrow \mathbf{R=5}$$