מבחן מס' 1

פתרון שאלה מס' 1

א. נסמן את אברי הסדרה ההנדסית : $a_1,a_2,a_3,......,a_{12}$ **.** מנת הסדרה היא q.

נתון: $a_7 = 27a_4 \Leftarrow a_1q^6 = 27a_1q^3 \Leftarrow q^3 = 27 \Leftarrow \mathbf{q = 3}$ **.**

ב. 1) 6 האיברים האחרונים בסדרה : $a_1,......,a_6,\underbrace{a_7,......,a_{12}}$

האיברים במקומות הזוגיים בסדרה : $a_2,a_4,a_6,......,a_{12}$ **.**

ארגון הנתונים: A_1

הסדרה	A_1	Q	N	S
$a_1,a_2,a_3,......,a_{12}$	a_1	3	12	
$a_7,a_8,......,a_{12}$	$a_7 = a_1\cdot 3^6$ $= 729a_1$	3	6	$\frac{729a_1(3^6-1)}{2} = 265356a_1$
$a_2,a_4,a_6,......,a_{12}$	$a_2 = a_1\cdot 3$	$3^2 = 9$	6	$\frac{3a_1(9^6-1)}{8} = 199290a_1$

נתון: $265356\cdot a_1 = 199290\cdot a_1 + 33033 \Rightarrow 66066\cdot a_1 = 33033 \Rightarrow \mathbf{a_1 = 0.5}$

2) נתון: $a_n + a_{n+1} = 162 \Rightarrow a_n + a_n\cdot 3 = 162 \Rightarrow 4a_n = 162 \Rightarrow a_n = 40.5 \Rightarrow$

האיברים העוקבים הם : **40.5 , 121.5** $\Leftarrow a_{n+1} = 40.5\cdot 3 = 121.5$

$\Rightarrow 0.5\cdot 3^{n-1} = 40.5 \Rightarrow 3^{n-1} = 81 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow \mathbf{a_5} + \mathbf{a_6} = 162$

המקומות הם : **5 ו- 6**

ג. 1) נסמן את אברי הסדרה החשבונית ב- $b_1,b_2,b_3,.......,b_n$ **.**

נתון: $b_n = a_6 = 121.5$, $b_1 = a_5 = 40.5$, $S_n = 4455$. מתקבלות המשוואות:

$40.5+(n-1)d = 121.5$, ו- $4455 = \frac{(40.5+121.5)n}{2}$.

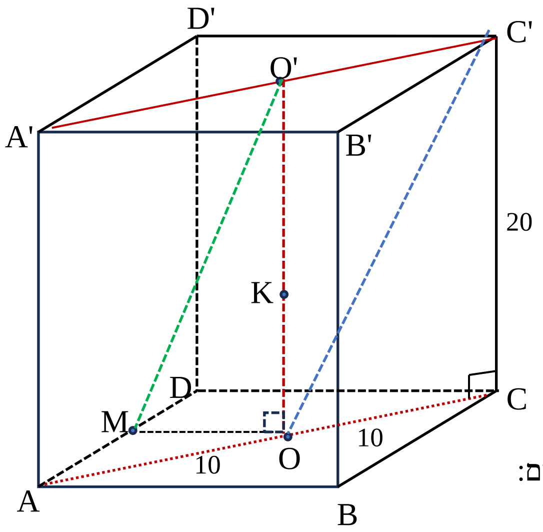
$\Rightarrow 4455 = 81n \Rightarrow \mathbf{n = 55}$

2) $40.5+(n-1)d = 121.5 \Rightarrow 40.5+54d = 121.5 \Rightarrow \mathbf{d = 1.5}$

3) $b_1,.....,b_{45},\overbrace{b_{46}.......,b_{55}}$. סכום 10 האיברים האחרונים של הסדרה הוא סכום האיברים $b_{46}+.......+b_{55}$. לכן: $b_{46} = b_1+45d = 40.5+45\cdot 1.5 = 108 \Rightarrow$

$b_{46}+.......+b_{55} = \frac{(108+121.5)10}{2} = \mathbf{1147.5}$.

פתרון שאלה מס' 2



א. $AC = CC' = 20$, O אמצע האלכסון AC לכן $OC = 10$.

$CC' \perp AC$, לכן , במשולש C'CO . צריך לחשב $\sphericalangle C'OC$.

מקבלים : $\tan \sphericalangle C'OC = \frac{20}{10} \Rightarrow \sphericalangle C'OC = \mathbf{63.43^o}$

ב. הנקודה M היא אמצע המקצוע AD והנקודה O הוא אמצע האלכסון AC , לכן MO קטע אמצעים במשולש ADC ואורכו חצי מאורך הצלע DC של המלבן ABCD .

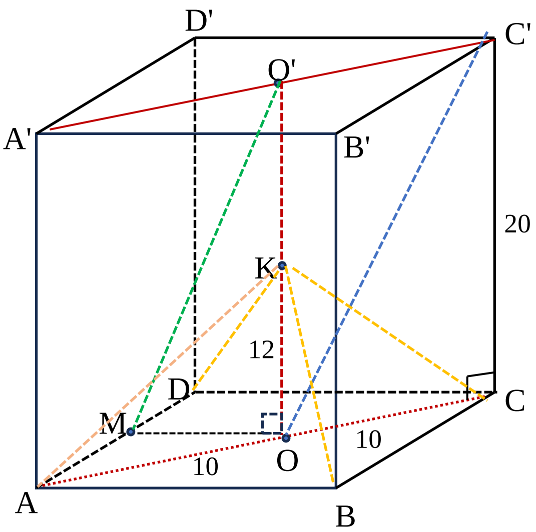
המרובע O'C'CO הוא מלבן , לכן $OO' = 20$.

נתון: $\sphericalangle O'MO = 69.19^\circ$ לכן במשולש ישר הזווית O'MO מקבלים:

$$\tan\left(68.19^\circ\right) = \frac{20}{MO} \Rightarrow MO = 8 \Rightarrow DC = AB = 16 \Rightarrow$$

$$16^2 + BC^2 = 20^2 \Rightarrow BC = 12 \Rightarrow S_{ABCD} = 16 \cdot 12 = 192 \Rightarrow$$

נפח התיבה $V_{ABCDA'B'C'D'} = 16 \cdot 12 \cdot 20 = \mathbf{3840}$



ג. 1) $V_{KABCD} = \frac{1}{5} \cdot 3840 = 768 \Rightarrow$

$$\frac{192 \cdot KO}{3} = 768 \Rightarrow \mathbf{KO = 12}$$

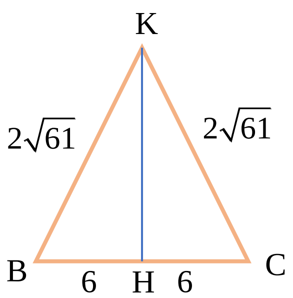
2) הפירמידה KABCD היא פירמידה ישרה , לכן כל המקצועות הצדדים שווים. במשולש ישר-זווית KCO מקבלים :

$$\tan \sphericalangle KCO = \frac{12}{10} \Rightarrow \sphericalangle KCO = \mathbf{50.19^o}$$

3) במשולש KOC : $KC^2 = 12^2 + 10^2 \Rightarrow KC = 2\sqrt{61}$

במשולש שווה- השוקיים KBC : $BC = 12$, $KB = KC = 2\sqrt{61}$

נוריד גובה KH לבסיס BC . במשולש KHC :



$$\cos \sphericalangle KCH = \frac{6}{2\sqrt{61}} \Rightarrow \sphericalangle KCH = 67.41^o$$

$$\Rightarrow S_{\Delta KBC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{61} \cdot 12 \cdot \sin 67.41^o = \mathbf{86.53^o}$$

פתרון שאלה מס' 3

א. $f'(x) = 0 \Rightarrow -4\sin(2x)+9\cos x = 0 \Rightarrow -8\sin x\cos x + 9\cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x(-8\sin x + 9) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ או $-8\sin x + 9 = 0$

אין פתרון למשוואה $\sin x = 1\frac{1}{8}$ $\Leftarrow$ $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$ $\Leftarrow$ הפתרונות בתחום הנתון:

$x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

x	-0.5π	$< x <$	0.5π	$< x <$	1.5π	$< x <$	2π
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	min	↗	Max	↘	min	↗	Max

מקבלים: $x = -\frac{\pi}{2}$ **מינימום**, $x = \frac{\pi}{2}$ **מקסימום**, $x = \frac{3\pi}{2}$ **מינימום**, $x = 2\pi$ **מקסימום**

ב. 1) נקודת המקסימום הפנימית של הפונקציה $f(x)$ מתקבלת בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$, לכן,

הנקודה $(\frac{\pi}{2};4)$ היא נקודת המקסימום הפנימית של הפונקציה. מקבלים:

$$f(x) = \int(-4\sin(2x)+9\cos x)dx = \frac{4\cos(2x)}{2}+9\sin x + c \Rightarrow$$

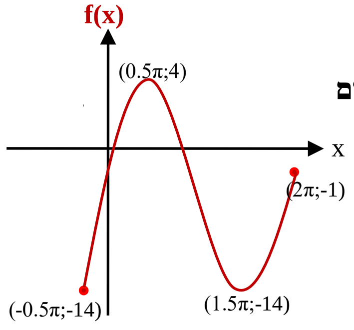
$$f(x) = 2\cos(2x)+9\sin x + c \Rightarrow 4 = 2\cos(\pi)+9\sin\frac{\pi}{2} + c \Rightarrow$$

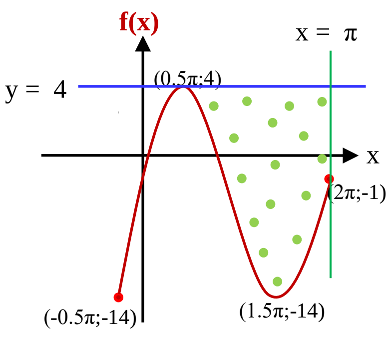
$$4 = -2+9+c \Rightarrow c = -3 \Rightarrow \mathbf{f(x) = 2\cos(2x) + 9\sin x - 3}$$

2) $f(-\frac{\pi}{2}) = -14,\ f(\frac{\pi}{2}) = 4,\ f(\frac{3\pi}{2}) = -14,\ f(2\pi) = -1$. מתקבלות הנקודות:

$(-\frac{\pi}{2};-14)$ מינימום, $(\frac{\pi}{2};4)$ מקסימום, $(\frac{3\pi}{2};-14)$ מינימום, $(2\pi;-1)$ מקסימום

(3





ג. $S = \int_{0.5\pi}^{2\pi} 4-(2\cos(2x)+9\sin x - 3)dx =$

$\int_{0.5\pi}^{2\pi} (7-2\cos(2x) - 9\sin x)dx =$

$\left[7x - \frac{2\sin(2x)}{2} + 9\cos x\right]_{0.5\pi}^{2\pi} =$

$(14\pi + 9) - (3.5\pi) = 10.5\pi + 9 \approx \mathbf{41.99}$

פתרון שאלה מס' 4

א. 1) תחום ההגדרה: $x^2 - 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x \neq 1}$

2) $f(0) = \dfrac{5e^0}{1} = 5 \Rightarrow \mathbf{(0;5)}$, $\dfrac{5e^{-x}}{x^2 - 2x + 1} = 0 \Leftarrow 5e^{-x} \neq 0 \Leftarrow$ אין חיתוך עם ציר ה- x .

3) $e^{-x} \neq 0$ לכל ערך של x לכן הישר $\mathbf{x = 1}$ הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה המאונכת לציר ה- x.

4) $$f(x) = \frac{5e^{-x}}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5e^{-x}(x^2 - 2x + 1) - 5e^{-x}(2x - 2)}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$\frac{-5e^{-x}(x^2 - 2x + 1 + 2x - 2)}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5e^{-x}(x^2 - 1)}{x^2 - 2x + 1} = 0$$

$$\Rightarrow 5e^{-x}(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 , x = -1$$

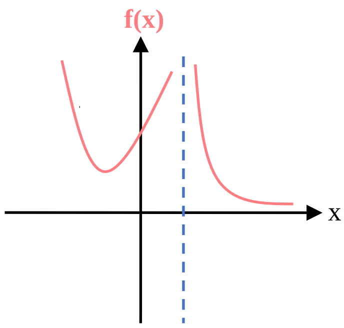
על פי תחום ההגדרה $x \neq 1$ לכן מקבלים פתרון רק עבור $x = -1$. $f(-1) = 3.4$

x	x <	-1	< x <	1	< x
f '(x)	-	0	+		-
f(x)	↘	min	↗		↘

מקבלים: **(-1;3.4) נקודת מינימום**

5) **תחום העלייה:** $\mathbf{-1 < x < 1}$, **תחומי הירידה:** $\mathbf{x < -1 , x > 1}$

ב.

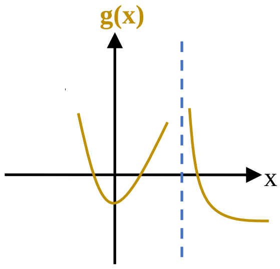


ג. על פי סעיף א-4), הנקודה (-1;0) היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה f '(x) עם ציר ה- x . הפונקציה f '(x) איננה מוגדרת עבור x = 1 , היא שלילית בתחומים $x < -1$ ו- $x > 1$ וחיובית בתחום $-1 < x < 1$

הגרף היחיד שמתאים הוא **גרף I.**

ד. 1) הפונקציה $g(x) = f(x - 1) - 5$ היא הזזה אופקית של הפונקציה f(x) יחידה אחת ימינה ו- 5 יחידות כלפי מטה. לכן , **נקודת המינימום תהיה: (0;-1.6)**

2) גרף הפונקציה יחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות לפחות .



3) **נכון-** לפונקציה g(x) יש נקודת מינימום בנקודה שבה x = 0

פתרון שאלה מס' 5

א. 1) תחום ההגדרה: $x^2>0$ וגם $\ln(x^2)-2\neq 0$. מקבלים: $\mathbf{x\neq 0}$

וגם $\ln(x^2)-2\neq 0 \Leftarrow \ln(x^2)\neq 2 \Leftarrow x^2\neq e^2 \Leftarrow \mathbf{x\neq \pm e}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחומים $\mathbf{x<-e\,,\,-e<x<0\,,\,0<x<e\,,\,x>e}$

2) הפונקציה $f(x)$ לא מוגדרת עבור $x=0$ לכן, אין חיתוך עם ציר ה- y .

חיתוך עם ציר ה- x : $\dfrac{x}{\ln(x^2)-2}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ אין פתרון

3) $x\to \pm e \Rightarrow f(x)\to \pm\infty \Rightarrow$

האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x הן : $\mathbf{x=e\,,\,x=-e}$

$x\to 0\Rightarrow f(x)\to 0\Rightarrow$

אין אסימפטוטה בנקודה שבה $x=0$. מתקבלת "נקודה ריקה"

4) $$f(x)=\frac{x}{\ln(x^2)-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\ln(x^2)-2\right)-x\left(\frac{2x}{x^2}\right)}{\left(\ln(x^2)-2\right)^2}=\frac{\ln(x^2)-2-2}{\left(\ln(x^2)-2\right)^2}\Rightarrow$$

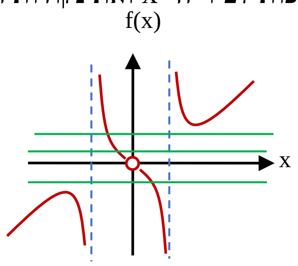
$$f'(x)=\frac{\ln(x^2)-4}{\left(\ln(x^2)-2\right)^2}=0\Rightarrow \ln(x^2)=4\Rightarrow x^2=e^4\Rightarrow x=\pm e^2\Rightarrow$$

$$f(e^2)=\frac{e^2}{\ln(e^4)-2}=\frac{e^2}{2},\ f(-e^2)=\frac{-e^2}{\ln(e^4)-2}=-\frac{e^2}{2}$$

x	x <	$-e^2$	< x <	-e	< x<	0	< x <	e	< x <	e^2	< x
f '(x)	+	0	-		-		-		-	0	+
f(x)	↗	Max	↘		↘		↘		↘	min	↗

מקבלים: $\left(e^2;\frac{e^2}{2}\right)$ **נקודת מינימום** , $\left(-e^2;-\frac{e^2}{2}\right)$ **נקודת מקסימום**

ב. הגרף התואם את תחום ההגדרה , האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x ואת נקודות הקיצון שמצאנו הוא **גרף III.**



ג. אם הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$

בנקודה אחת בדיוק, הרי ש- k נמצא בתחומים

$0<k<\frac{e^2}{2}$ או $-\frac{e^2}{2}<k<0$. לכן ,

המספר $y=\ k+e^2$ נמצא בתחום

$e^2<y<1.5e^2$ או $\frac{1}{2}e^2<y<e^2$ ואז הישר $y=k+e^2$ חותך את גרף הפונ'ציה

$f(x)$ **בשלוש נקודות**

מבחן מס' 2

פתרון שאלה מס' 1

א. 1) צריך להוכיח שההפרש בין כל שני איברים עוקבים הוא קבוע:

$$a_{n+1}-a_n=98-4(n+1)-(98-4n)=98-4n-4-98+4n=-4\Rightarrow$$

ההפרש הוא קבוע, לכן הסדרה היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא **d = - 4** .

2) $a_n=98-4n\Rightarrow \mathbf{a_1}=98-4\cdot 1=\mathbf{94}$

3) צריך לבדוק האם יש n טבעי המקיים את המשוואה $32=98-4n$. מקבלים :
$4n=66\Rightarrow n=16.5$. המספר 16.5 איננו מספר טבעי, לכן המספר 32 **איננו איבר בסדרה**.

ב. 1) הסדרה היא $a_1,\ldots\ldots,a_n,a_{n+1}\ldots\ldots a_{2n}$, לכן , שני האיברים האמצעיים הם a_n,a_{n+1} .

נתון: $a_n+a_{n+1}=-16\Leftarrow a_n+a_n+d=-16\Leftarrow 2a_n-4=-16\Leftarrow a_n=-6\Leftarrow$

$$a_1+(n-1)d=-6\Rightarrow 94+(n-1)\cdot(-4)=-6\Rightarrow 94-4n+4=-6\Rightarrow$$

$\Rightarrow 4n=104\Rightarrow 2n=52\Rightarrow$ בסדרה ישנם **52 איברים**

2) נמצא את התחום בו $a_n>0\Rightarrow 98-4n>0$. מקבלים $4n<98\Rightarrow n<24.5\Rightarrow n\le 24$

לכן , בסדרה ישנם **24 איברים חיוביים**

3) מצאנו כי האיברים $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots,a_{24}$ הם חיוביים .

$$a_{24}=98-4\cdot 24=2\ \Rightarrow a_{25}=2-4=-2$$

האיברים $a_{25},a_{26},\ldots\ldots,a_{52}$ הם שליליים , כלומר , ישנם $52-24=28$ איברים שליליים

האיבר הראשון בסדרה זו הוא $a_{25}=-2$, הפרש הסדרה הוא -4

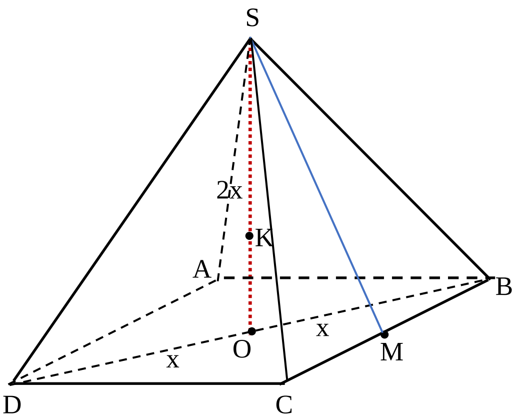
לכן : $S_{28}=\dfrac{(-4+27\cdot(-4))28}{2}=\mathbf{-1568}$

ג. בסדרה המקורית ישנם 48 איברים. האיברים שנמחקו הם $a_4,a_8,a_{12},\ldots\ldots,a_{52}$.
היות ויש קפיצה קבועה של 4 מקומות בסדרה. נוצרת סדרה חשבונית חדשה שההפרש שלה הוא $4d=-16$. האיבר הראשון בסדרה זו הוא $a_4=a_1+3d=94+3(-4)=82$.
מספר אברי הסדרה על פי סדרת המקומות: $4\cdot 1,\ 4\cdot 2,\ 4\cdot 3,\ldots.\ 4\cdot 13$ כלומר, ישנם 31 איברים בסדרה זו.

הסדרה	A_1	D	N	S
הסדרה המקורית $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots,a_{52}$	94	- 4	52	$\dfrac{[2\cdot 94+51\cdot(-4)]52}{2}=-416$
סדרת האיברים שנמחקו $a_4,a_8,a_{12}\ldots\ldots,a_{52}$	82	- 16	13	$\dfrac{[2\cdot 82+12\cdot(-16)]13}{2}=-182$

לכן , סכום האיברים שנותרו בסדרה הוא: $-416-(-182)=\mathbf{-234}$

פתרון שאלה מס' 2



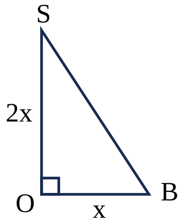
א. נתון: $SO = DB$, SO גובה הפירמידה. לכן,

הנקודה O היא מפגש אלכסוני המלבן $ABCD$.

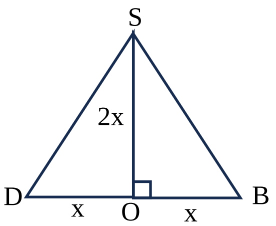
נסמן: $DO = OB = x$ ואז $SO = 2x$

הזווית בין SB לבסיס $ABCD$ היא הזווית $\sphericalangle SBO$.

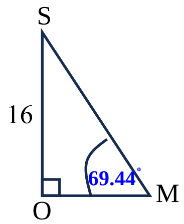
במשולש ישר0זווית SOB נקבל:



$$\tan\sphericalangle SBO = \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \sphericalangle SBO = \mathbf{63.43^{o}}$$



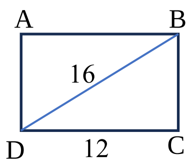
ב. $S_{\Delta SDB} = \dfrac{2x \cdot 2x}{2} = 2x^2 = 128 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$



הקטע SM יוצר זווית בת 69.44° עם הבסיס $ABCD$, לכן

$\sphericalangle SMO = 69.44^{\circ}$

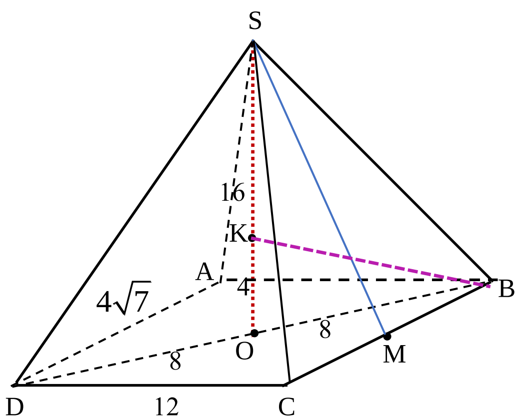
במשולש SOM : $\tan 69.44^{\circ} = \dfrac{16}{MO} \Rightarrow MO = 6$



MO הוא קטע אמצעים במשולש BDC , לכן, $DC = 12$.

$$\Rightarrow BC^2 + 12^2 = 16^2 \Rightarrow BC = 4\sqrt{7} \Rightarrow S_{ABCD} = 12 \cdot 4\sqrt{7} = 48\sqrt{7}$$

נפח הפירמידה $\Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{48\sqrt{7} \cdot 16}{3} = \mathbf{256\sqrt{7}}$



ג. 1) $V_{KABCD} = \dfrac{48\sqrt{7} \cdot KO}{3} = 16\sqrt{7} \cdot KO = \dfrac{1}{4} \cdot 256\sqrt{7} \Rightarrow$

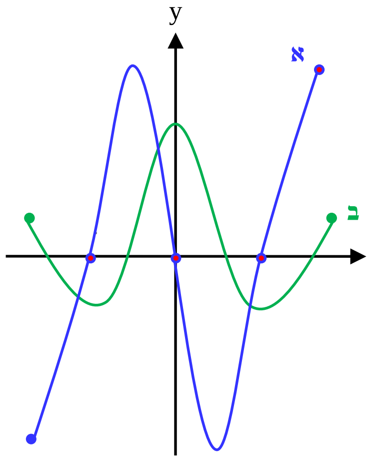
$$16\sqrt{7} \cdot KO = 64\sqrt{7} \Rightarrow \mathbf{KO = 4}$$

2) צריך לחשב את הזווית $\sphericalangle KBO$

במשולש ישר-זווית KOB מקבלים:

$$\tan\sphericalangle KBO = \frac{4}{8} \Rightarrow \sphericalangle KBO = \mathbf{26.57^{o}}$$

פתרון שאלה מס' 3



א. **גרף א - הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$**

גרף ב - הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$

הסבר : שיעורי 3 נקודות האפס (נקודות החיתוך עם ציר ה- x)

של גרף א' תואמות לשיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של גרף ב'.

גם תחומי החיוביות והשליליות של גרף א' תואמים לתחומי העלייה

והירידה של גרף ב'.

ארבעת נקודות האפס של גרף ב' אינן מתאימות לשיעורי ה- x של

נקודות הקיצון הפנימיות של גרף א'.

ב. $f(x) = 2\cos^2 x - \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 2\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x) = -4\cos x\cdot\sin x = -2\sin 2x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2\sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}$$

פתרונות המשוואה בתחום $-\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ הם: $x = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$

x	-0.75π	$< x <$	-0.5π	$< x <$	0	$< x <$	0.5π	$< x <$	0.75π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	Max	↘	min	↗	Max	↘	min	↗	Max

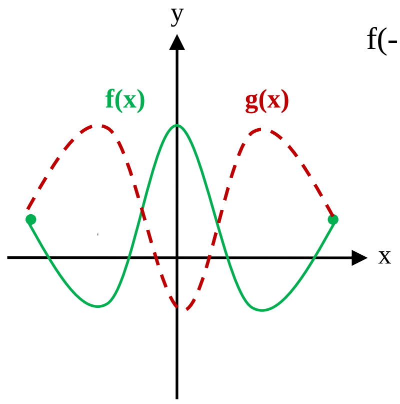
$$f(-\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2}, f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}, f(0) = 1\frac{1}{2}, f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}, f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

מתקבלות הנקודות: $(-\frac{3\pi}{4};\frac{1}{2})$ **מקסימום** , $(-\frac{\pi}{2};-\frac{1}{2})$ **מינימום** , $(0;1\frac{1}{2})$ **מקסימום** ,

$(\frac{\pi}{2};-\frac{1}{2})$ **מינימום** , $(\frac{3\pi}{4};\frac{1}{2})$ **מקסימום**

ג. 1) הפונקציה $g(x) = -f(x) + 1$ היא שיקוף של $f(x)$ ביחס לציר ה- x

והזזה של יחידה אחת כלפי מעלה . מתקבלות הנקודות:

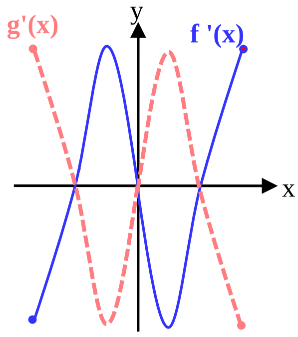


$$f(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}, f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}+1 = 1\frac{1}{2}, f(0) = -1\frac{1}{2}+1 = -\frac{1}{2},$$

$$\Leftarrow f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}+1 = 1\frac{1}{2}, f(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

$(-\frac{3\pi}{4};\frac{1}{2})$ **מינימום** , $(-\frac{\pi}{2};1\frac{1}{2})$ **מקסימום** , $(0;-\frac{1}{2})$ **מינימום** ,

$(\frac{\pi}{2};1\frac{1}{2})$ **ממקסימום** , $(\frac{3\pi}{4};\frac{1}{2})$ **מינימום**



2) הטענה הנכונה היא **טענה III**. $g(x) = -f(x) + 1 \Rightarrow g'(x) = -f'(x) \Rightarrow$

3) הגרף של $g'(x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f'(x)$ ביחס לציר ה- x :

פתרון שאלה מס' 4

א. 1) $e^x > 0$ לכל ערך של x , לכן הפונקציה $f(x)$ מוגדרת **לכל x** .

2) חיתוך עם ציר ה- y : $f(0) = \frac{1-8+7}{1} = 0 \Rightarrow \mathbf{(0;0)}$

חיתוך עם ציר ה- x : $\frac{e^{2x}-8e^x+7}{e^x} = 0 \Rightarrow e^{2x}-8e^x+7=0 \Rightarrow e^x = t \Rightarrow t^2-8t+7=0 \Rightarrow$

$t=1, t=7 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x=0, e^x = 7 \Rightarrow x = \ln 7 \Rightarrow \mathbf{(0;0),(\ln 7;0)}$

3) $f(x) = \frac{e^{2x}-8e^x+7}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2e^{2x}-8e^x)e^x - e^x(e^{2x}-8e^x+7)}{(e^x)^2} =$

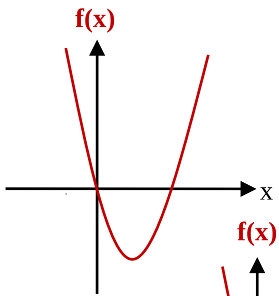
$\frac{e^x(2e^{2x}-8e^x - e^{2x}+8e^x-7)}{(e^x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{2x}-7}{e^x} = 0 \Rightarrow e^{2x}-7=0 \Rightarrow$

$e^{2x} = 7 \Rightarrow 2x = \ln 7 \Rightarrow x = \frac{\ln 7}{2} = 0.973 \Rightarrow y = -2.7$

x	x <	0.973	< x
f '(x)	-	0	+
f(x)	↘	min	↗

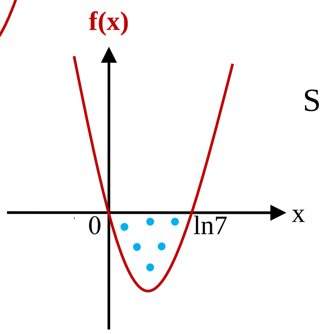
מקבלים: **(0.973;- 2.7) נקודת מינימום**

4)



ב. 1) $f(x) = \frac{e^{2x}-8e^x+7}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{8e^x}{e^x} + \frac{7}{e^x} = e^x - 8 + \frac{7}{e^x} \Rightarrow$

$f(x) = e^x - 8 + 7e^{-x}$



2) $S = \int_0^{\ln 7} \left[0-(e^x-8+7e^{-x})\right]dx = \int_0^{\ln 7} (-e^x+8-7e^{-x})dx =$

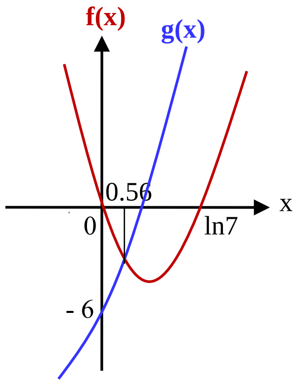
$\left[-e^x+8x-7\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{\ln 7} = \left[-e^x+8x+7e^{-x}\right]_0^{\ln 7} =$

$9.567 - 6 = \mathbf{3.567}$

ג. 1) חיתוך עם ציר y : $g(x) = f'(x) = \frac{e^{2x}-7}{e^x} \Rightarrow g(0) = -6 \Rightarrow \mathbf{(0;-6)}$.

חיתוך עם ציר x :

על פי סעיף א-3) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\ln7}{2} = 0.973 \Rightarrow \mathbf{(0.973;0)}$ (2

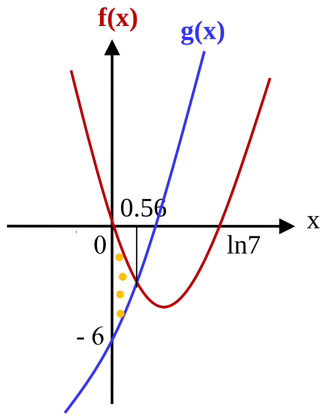


$S = \int_0^{0.56} (f(x) - f'(x))dx =$ (3

$$\int_0^{0.56} \left[(e^x - 8 + 7e^{-x}) - f'(x\right]dx =$$

$$= \left[\left(e^x - 8x - 7e^{-x}\right) - f(x)\right]_0^{0.56} =$$

$$(-6.728 + 2.25) - (-6 - 0) = \mathbf{1.522}$$



פתרון שאלה מס' 5

א. 1) תחום הגדרה : $\mathbf{x > 0}$

2) הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$ לכן אין חיתוך עם ציר ה- y .

חיתוך עם ציר ה- x :

$$2x\ln x - 4x = 0 \Rightarrow 2x(\ln x - 2) = 0 \Rightarrow \ln x - 2 = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow \mathbf{(e^2;0)}$$

3) נבדוק בתחום $0 < x < e^2$: $f(e) = 2e(\ln e - 2) < 0$,

ובתחום $x > e^2$: $f(e^3) = 2e^3(\ln e^3 - 2) > 0$ לכן:

תחום החיוביות: $\mathbf{x > e^2}$ **, תחום השליליות:** $\mathbf{0 < x < e^2}$

ב. 1) $f(x) = 2x\ln x - 4x \Rightarrow f'(x) = 2\cdot\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} - 4 = 2\ln x + 2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 2\ln x - 2$

$$2\ln x - 2 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \Rightarrow f(e) = 2e\cdot(-1) = -2e$$

x	x <	0	< x <	e	< x
f '(x)			-	0	+
f(x)			↘	min	↗

קיבלנו: **(e;-2e) נקודת מינימום**

2) אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x עבור $x = 0$.

הסבר : נבדוק את ערכי הפונקציה כאשר ערכי x הם מספרים חיוביים קרובים לאפס:

$f(0.01) = -0.132$, $f(0.001) = -0.0178$, $f(0.0001) = -0.0022$.

כלומר , ערכי ה- y שואפים לאפס . לכן, עבור $x = 0$ לא מתקבלת

אסימפטוטה אנכית אלא "נקודה ריקה" (0;0)

ג. 1) הפונקציה מוגדרת רק בתחום $x > 0$ בו מוגדרת הפונקציה $f(x)$

וגם לא מוגדרת כאשר $f(x) = 0$, כלומר , לא מוגדרת עבור $x = e^2$.

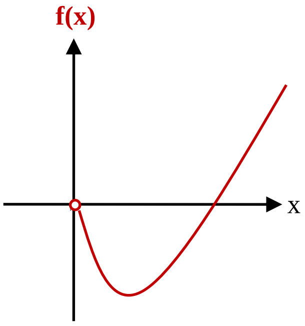
מקבלים:

$\mathbf{0<x<e^2, x>e^2}$

2) כן : כאשר $f(x)\to 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}\to\infty \Rightarrow g(x)\to\infty$

לכן, יתקבלו אסימפטוטות מאונכות

לציר ה- x עבור $\mathbf{x=e^2}$ ועבור $\mathbf{x=0}$.



(3

ד. נתון : $f(x)=h'(x)$, לכן, על פי תחומי החיוביות והשליליות של f(x) מקבלים:

x	x <	0	< x <	e^2	< x
h'(x) = f(x)			-	0	+
h(x)			↘	min	↗

לכן, לפונקציה h(x) יש **נקודת מינימום** בנקודה שבה $\mathbf{x=e^2}$.

ה. 1) $k(x)=-\frac{1}{2}f(x)$. הפונקציה k(x) היא שיקוף של הפונקציה f(x) ביחס לציר ה- x וכיווץ אנכי של ערכי הפונקציה. לכן, מקבלים: **(e;e) נקודת מקסימום** של הפונקציה k(x)

2) על פי תוצאות קודמות: A(e;-2e) , B(e;e) לכן:

AB = 3e וגובה המשולש AOB הוא e לכן:

$S_{\Delta AOB}=\frac{e\cdot 3e}{2}=\mathbf{1.5e^2}$.