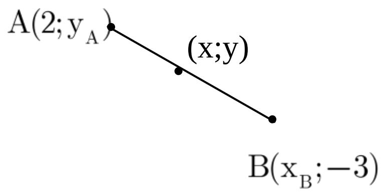
מבחן מס' 1

פתרון שאלה מס' 1



א. נסמן : $A(2;y_A)$, $B(x_B;-3)$. נתון: $AB = 20\sqrt{17}$ לכן:

$$\sqrt{(2-x_B)^2+(y_A+3)^2} = 20\sqrt{17}$$

נסמן: הנקודה $(x;y)$, נקודה על המקום הגיאומטרי המבוקש,
היא אמצע הקטע AB . נקבל:

$$\Rightarrow x = \frac{2+x_B}{2} \Rightarrow x_B = 2x-2 \ , \ y = \frac{y_A-3}{2} \Rightarrow y_A = 2y+3$$

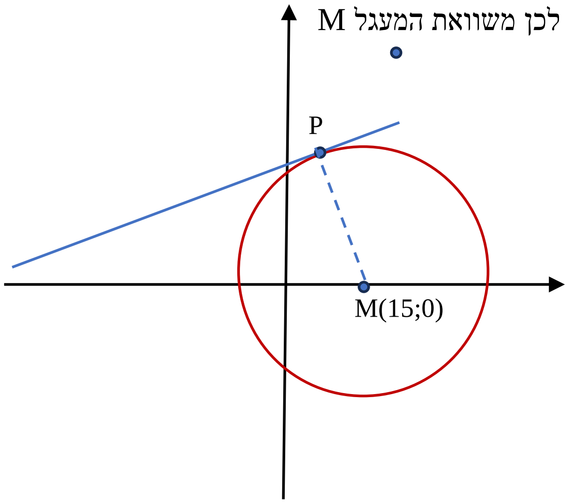
נציב x_B ו- y_A במשוואה שקיבלנו קודם:

$$2-(2x-2)^2 + 2y+3+3^2 = 6800 \Rightarrow$$

$$4-2x^2 + 2y+6^2 = 6800 \Rightarrow 2(2-x)^2 + 2(y+3)^2 = 6800 \Rightarrow$$

$$4\ x-2^2 + 4\ y+3^2 = 6800 \Rightarrow \mathbf{x\text{-}2^2 + y\text{+}3^2 = 1700}$$

ב. 1) מרכז המעגל שהתקבל בסעיף א' נמצא בנקודה (2;-3). הנקודה זזה ימינה 13 נקודות וכלפי מעלה 3 נקודות לנקודה M(15;0). רדיוס המעגל לא השתנה , לכן משוואת המעגל M היא : $\mathbf{(x-15)^2 + y^2 = 1700}$



2) משוואת המשיק למעגל : $y = \frac{1}{4}x + n \Rightarrow x - 4y + 4n = 0$

מרחק המשיק ממרכז המעגל M(15;0) שווה לרדיוס המעגל M כלומר, ל- $\sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$. מקבלים:

$$\frac{|15 - 4\cdot 0 + 4n|}{\sqrt{1+16}} = 10\sqrt{17} \Rightarrow |15+4n| = 170 \Rightarrow$$

$$|15+4n| = 170 \Rightarrow 15+4n = 170 \Rightarrow 4n = 155 \Rightarrow$$

מתקבל המשיק : $x - 4y + 155 = 0$.

או : $15 + 4n = -170 \Rightarrow 4n = -185 \Rightarrow$ ואז

מתקבל המשיק : $x - 4y - 185 = 0$.

הרדיוס PM מאונך למשיק לכן שיפועו – 4 ומשוואתו: $y = -4(x-15) = -4x+60$

אם משוואת המשיק היא $x - 4y + 155 = 0$, נקודת ההשקה P היא:

$$x-4(-4x+60)+155 = 0 \Rightarrow 17x-240+155 = 0 \Rightarrow 17x = 85 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 40$$

מתקבלת הנקודה P(5;40).

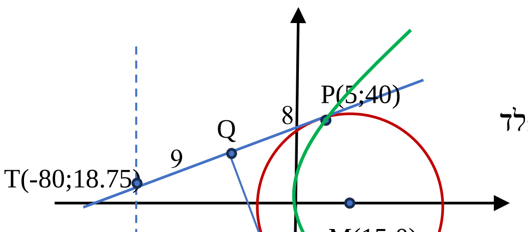
אם משוואת המשיק היא $x - 4y - 185 = 0$, נקודת ההשקה P היא:

$$x-4(-4x+60)-185 = 0 \Rightarrow 17x-240-185 = 0 \Rightarrow 17x = 425 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow y = -40$$

הנקודה P נמצאת ברביע הרביעי. לכן:

משוואת המשיק היא: $x - 4y + 155 = 0$ ונקודת ההשקה היא P(5;40)

ג. 1) הפרבולה $y^2 = 2px$ עוברת בנקודה P(5;40) , לכן $40^2 = 2p\cdot 5$



$\Rightarrow p = 160 \Rightarrow \mathbf{y^2 = 320x}$

2) מצאנו שהישר $x - 4y + 155 = 0$ המשיק למעגל M בנקודה P .

משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 320x$ בנקודה $P(5;40)$:

$$40y = 160(x+5) \Rightarrow y = 4(x+5) \Rightarrow 4x - y + 20 = 0$$

לא התקבלה אותה משוואה .

ד. 1) $P = 160$ לכן הישר $x = -80$ הוא המדריך של הפרבולה.

שיעורי הנקודה T : $x = -80$, $-80 - 4y + 155 = 0 \Leftarrow$

$y = 18.75 \Leftarrow$ $T(-80;18.75)$.

נמצא את שיעורי הנקודה Q :

$$x_Q = \frac{-80\cdot 8 + 5\cdot 9}{17} = -35 \text{ , } y_Q = \frac{18.75\cdot 8 + 40\cdot 9}{17} = 30 \Rightarrow \mathbf{Q(-35;30)}$$

$$\Rightarrow Q(-35;30)$$

נחשב את מרחק הנקודה Q ממרכז המעגל M :

$$QM = \sqrt{(-35-15)^2 + (30-0)^2} = 10\sqrt{34} > 10\sqrt{17} \Rightarrow$$

המרחק גדול מרדיוס המעגל , לכן הנקודה Q נמצאת מחוץ למעגל.

2) משוואת ישר בעל שיפוע m העובר בנקודה (-35;30) :

$$y - 30 = m(x + 35) \quad \Rightarrow \quad mx - y + 35m + 30 = 0 \Rightarrow$$

מרחק הישר ממרכז המעגל $M(15;0)$ שווה לרדיוס המעגל, לכן:

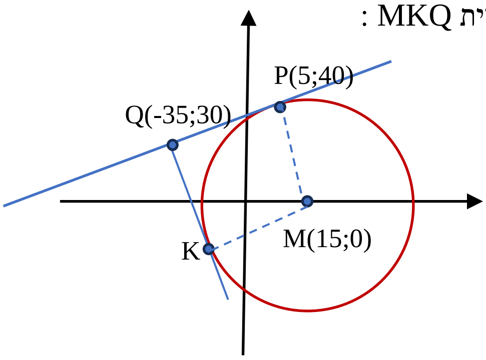
$$\frac{|15m + 35m + 30|}{\sqrt{m^2+1}} = 10\sqrt{17} \Rightarrow |50m + 30| = 10\sqrt{17}\sqrt{m^2+1} \Rightarrow$$

$$|5m+3| = \sqrt{17}\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 25m^2 + 30m + 9 = 17m^2 + 17 \Rightarrow$$

$$8m^2 + 30m - 8 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}, m = -4 \Rightarrow$$

שיפוע המשיק הנוסף הוא 4 – ומשוואת המשיק היא : $y = -4x - 110$

3) נחשב את אורך המשיק QK בעזרת משפט פיתגורס במשולש ישר הזווית MKQ :



$$QK = \sqrt{QM^2 - MK^2} = \sqrt{\left(10\sqrt{34}\right)^2 - \left(10\sqrt{17}\right)^2} = \mathbf{10\sqrt{17}}$$

4) שטח המשולש QPM:

$$S_{\Delta QPM} = \frac{QP\cdot PM}{2} = \frac{\sqrt{(-35-5)^2 + (30-40)^2}\cdot 10\sqrt{17}}{2} = 850$$

$$S_{\Delta QKM} = \frac{QK\cdot KM}{2} = \frac{10\sqrt{17}\cdot 10\sqrt{17}}{2} = 850 \Rightarrow \mathbf{S_{QPMK} = 1700}$$

פתרון שאלה מס' 2

א. הפאות של המקבילון הן מקביליות לכן: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\underline{u}$,
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}=\underline{w}$.

מקבלים: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$, $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC'}$ $\Leftarrow$

$\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$.

הנקודה P נמצאת על הפאה BCC'B' , לכן הווקטור $\overrightarrow{BP}$ הוא קומבינציה ליניארית של הווקטורים $\underline{w}$ ו- $\underline{v}$, כלומר, נוכל לרשום: $\overrightarrow{BP}=a\underline{v}+b\underline{w}$.

הנקודה K נמצאת על הווקטור $\overrightarrow{D'P}$ לכן נוכל לסמן: $\overrightarrow{KP}=c\overrightarrow{D'P}$. נקבל:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KA}=\underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{u}+a\underline{v}+b\underline{w}-c\overrightarrow{D'P}-\frac{3}{4}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})=\underline{0}\Rightarrow$$

$$\underline{u}+a\underline{v}+b\underline{w}-c(-\underline{v}-\underline{w}+\underline{u}+\overrightarrow{BP})-\frac{3}{4}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})=\underline{0}\Rightarrow$$

$$\underline{u}+a\underline{v}+b\underline{w}-c(-\underline{v}-\underline{w}+\underline{u}+a\underline{v}+b\underline{w})-\frac{3}{4}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})=\underline{0}\Rightarrow$$

$$\underline{u}+a\underline{v}+b\underline{w}+c\underline{v}+c\underline{w}-c\underline{u}-ca\underline{v}-cb\underline{w}-\frac{3}{4}\underline{u}-\frac{3}{4}\underline{v}-\frac{3}{4}\underline{w}=\underline{0}\Rightarrow$$

$$(1-c-\frac{3}{4})\underline{u}+(a+c-ca-\frac{3}{4})\underline{v}+(b+c-cb-\frac{3}{4})\underline{w}=0\underline{u}+0\underline{v}+0\underline{w}$$

לפי יחידות ההצגה מקבלים: $c=\frac{1}{4}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{KP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{D'P}$ $\Leftarrow$ $\boldsymbol{\frac{D'K}{KP}=\frac{3}{4}}$

וגם $a+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a-\frac{3}{4}=0$ $\Leftarrow$ $a=\frac{2}{3}$ וגם

$b+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}b-\frac{3}{4}=0$ $\Leftarrow$ $\frac{3}{4}b=\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $b=\frac{2}{3}$. קיבלנו: $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w}$.

ב. $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{KP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{AC'}+\frac{1}{4}\overrightarrow{D'P}=$

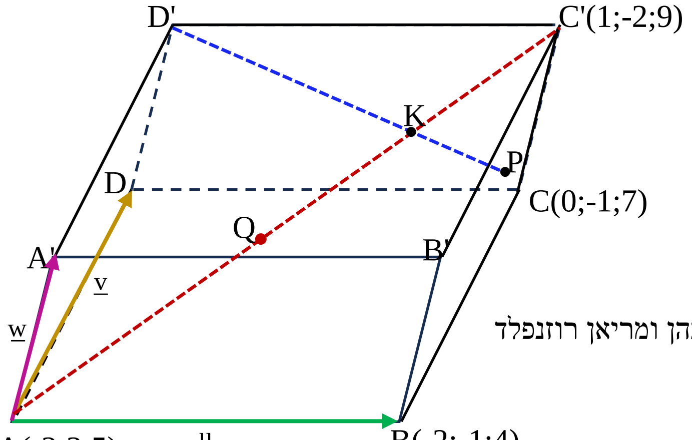
$$=\frac{3}{8}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})+\frac{1}{4}((-\underline{v}-\underline{w}+\underline{u}+\overrightarrow{BP})=$$

$$\frac{3}{8}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})+\frac{1}{4}(-\underline{v}-\underline{w}+\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w})=$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{QP}=\frac{5}{8}\underline{u}+\frac{7}{24}\underline{v}+\frac{7}{24}\underline{w}}$$

ג. 1) על פי הנתונים: $\underline{u}=(0;-4;-1)$,

$\underline{v}=(2;0;3)$, $\underline{w}=(1;-1;2)$. לכן:



$\overrightarrow{D'C'} = \underline{u} \Rightarrow$

$1\text{-}\ x_{D'} = 0, -2 - y_{D'} = -4, 9 - z_{D'} = -1 \Rightarrow \mathbf{D'(1;2;10)}$

(2 $\cos\sphericalangle DAB = \dfrac{\underline{v}\cdot\underline{u}}{|\underline{v}|\cdot|\underline{u}|} = \dfrac{(2;0;3)\cdot(0;-4;-1)}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{16+1}} = \dfrac{-3}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\mathbf{\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = 101.64^o} \Rightarrow \mathbf{\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 78.36^o}$

(3 $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC'} = \dfrac{3}{4}(1+2;-2-3;9-5) = (\dfrac{9}{4};-\dfrac{15}{4};3)$

$\Rightarrow x_k + 2 = \dfrac{9}{4}, y_k - 3 = -\dfrac{15}{4}, z_k - 5 = 3 \Rightarrow \mathbf{K(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4};8)}$

$\overrightarrow{BP} = \dfrac{2}{3}(\underline{v}+\underline{w}) = \dfrac{2}{3}\left[(2;0;3)+(1;-1;2)\right] = (2;-\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_p + 2 = 2, y_P + 1 = -\dfrac{2}{3}, z_P - 4 = \dfrac{10}{3} \Rightarrow \mathbf{P(0;-\dfrac{5}{3};\dfrac{22}{3})}$

$\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{4}+2;-\dfrac{3}{4}-3;8-5) = (\dfrac{9}{8};-\dfrac{15}{8};\dfrac{3}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_Q + 2 = \dfrac{9}{8}, y_Q - 3 = -\dfrac{15}{8}, z_Q - 5 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \mathbf{Q(-\dfrac{7}{8};\dfrac{9}{8};\dfrac{13}{2})}$

4) המישור BCC'B' נקבע על-ידי הווקטורים $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$, לכן הווקטור (A;B;C) המאונך למישור

מקיים: $(A;B;C)\cdot(2;0;3) = 0$ וגם $(A;B;C)\cdot(1;-1;2) = 0$. מקבלים:

$2A + 3C = 0$ וגם $A - B + 2C = 0$ $\Leftarrow A = -1.5C \Leftarrow$ נבחר $C = -2$ ונקבל: $A = 3$,

$3 - B - 4 = 0 \Leftarrow B = -1$. מתקבל המישור: $3x - y - 2z + d = 0$. נציב את שיעורי הנקודה

C(0;-1;7) ונקבל $1 - 14 + d = 0 \Leftarrow d = 13 \Leftarrow$ משוואת המישור BCC'B' היא:

$3x - y - 2z + 13 = 0$. נציב את שיעורי הנקודה $P(0;-\dfrac{5}{3};\dfrac{22}{3})$ ונקבל:

$3\cdot 0 + \dfrac{5}{3} - 2\cdot\dfrac{22}{3} + 13 = 0 \Leftarrow$ הנקודה P נמצאת במישור

5) ההצגה הפרמטרית של הישר העובר בנקודות D' ו- P היא:

$\underline{x} = (1;2;10) + s\left(0-1;-\dfrac{5}{3}-2;\dfrac{22}{3}-10\right) = (1;2;10) + s(-1;-\dfrac{11}{3};-\dfrac{8}{3}) \Rightarrow$

$\underline{x} = (1;2;10) + t(3;11;8)$. הזווית α בין הישר למישר $3x - y - 2z + 13 = 0$ מקיימת:

$\sin\alpha = \dfrac{|(3;11;8)\cdot(3;-1;-2)|}{\sqrt{9+121+64}\cdot\sqrt{9+1+4}} = \dfrac{18}{\sqrt{194}\cdot\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha = \mathbf{20.21^o}$

6) נמצא את משוואת המישור D'PQ לפי שיעורי הנקודות : D'(1;2;10) ,

$P(0;-\frac{5}{3};\frac{22}{3})$, $Q(-\frac{7}{8};\frac{9}{8};\frac{13}{2}) \Leftarrow \overrightarrow{PD'} = (1;\frac{11}{3};\frac{8}{3}) = \frac{1}{3}(3;11;8)$,

$\overrightarrow{QD'} = (\frac{15}{8};\frac{7}{8};\frac{7}{2}) = \frac{1}{8}(15;7;28)$. נמצא את הווקטור האנך למישור:

$(A;B;C)\cdot(3;11;8) = 0$ וגם $(A;B;C)\cdot(15;7;28) = 0$. מקבלים:

$3A + 11B + 8C = 0 \Leftarrow$ $-15A - 55B - 40C = 0$ וגם $15A + 7B + 28C = 0 \Leftarrow$

$-48B - 12C = 0 \Leftarrow C = -4B$ נבחר $B = 1$ ונקבל $C = -4 \Leftarrow$ $3A + 11 - 32 = 0 \Leftarrow$

$3A = 21 \Leftarrow$ $A = 7$. מתקבלת המשוואה: $7x + y - 4z + d = 0$. נציב את שיעורי הנקודה

$D(1;2;10)$ ונקבל $7 + 2 - 40 + d = 0 \Leftarrow$ $d = 31$.

משוואת המישור D'PQ היא : $7x + y - 4z + 31 = 0$.

משוואת המישור BCC'B' היא : $3x - y - 2z + 13 = 0$.

הנקודות על ישר החיתוך של שני המישורים מקיימות את מערכת המשוואות , לכן:

$10x - 6z + 44 = 0 \Leftarrow$ $x = -4.4 + 0.6z$. נסמן : $z = m$ ונקבל $x = -4.4 + 0.6m \Leftarrow$

$3(-4.4 + 0.6m) - y - 2m + 13 = 0 \Leftarrow$ $-13.2 + 1.8m - y - 2m + 13 = 0 \Leftarrow$

$y = -0.2 - 0.2m$. נקודה כללית על ישר החיתוך היא מהצורה:

$(-4.4 + 0.6m; -0.2 - 0.2m; m)$. מתקבלת ההצגה הפרמטרית של הישר :

$\underline{x} = (-4.4;-0.2;0) + m(0.6;-0.2;1)$ או : עבור $m = -1$ מתקבלת הנקודה $(-5;0;-1)$ ועבור

$n = 5m$ מתקבלת ההצגה הפרמטרית: $\mathbf{\underline{x} = (-5;0;-1) + n(3;-1;5)}$

<u>פתרון שאלה מס' 3</u>

א. פתרונות המשוואה הריבועית : $iz^2 - (1+i)z + 1 = 0$ הם:

$$z_{1,2} = \frac{1+i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2i} = \frac{1+i \pm \sqrt{1+2i-1-4i}}{2i} = \frac{1+i \pm \sqrt{-2i}}{2i}$$

נסמן $\sqrt{-2i} = x + yi$ ונקבל: $-2i = (x+yi)^2 \Leftarrow -2i = x^2 + 2xyi - y^2 \Leftarrow$

$$x^2 - y^2 = 0\ ,\ 2xy = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

עבור $x = 1$ נקבל $y = -1$, ועבור $x = -1$ נקבל $y = 1$. לכן: $\sqrt{-2i} = \pm(1 - i)$.

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{1+i \pm (1-i)}{2i} \Rightarrow z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} \Rightarrow \mathbf{z_1 = -i}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{1+i-(1-i)}{2i} \Rightarrow z_2 = \frac{2i}{2i} \Rightarrow \mathbf{z_2 = 1}$$

ב. 1) נסמן : $z = x + yi$ ונקבל:

$$|z + i\bar{z}| = 0 \Rightarrow |x + yi + i(x - yi)| = 0 \Rightarrow |x + yi + xi + y| = 0 \Rightarrow$$

$$|(x + y) + (x + y)i| = 0 \Rightarrow \sqrt{2(x + y)^2} = 0 \Rightarrow 2(x + y)^2 = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \mathbf{y = -x}$$

2) $w_1 = z_1 + z_2 = 1 - i$. הנקודה המתאימה למספר w_1 במישור של גאוס היא

הנקודה $(1;-1)$ שנמצאת על הישר $y = -x$.

3) נוכל לסמן $w = R\,\text{cis}\theta$ נקבל: $iw = \text{cis}90^\circ \cdot R\text{cis}\theta = R\text{cis}\left(\theta + 90^\circ\right)$

לכן, אם הנקודה המתאימה למספר w נמצאת על הישר $y = -x$, אז הנקודה המתאימה למספר iw

נמצאת על ישר שיוצר זווית ישרה עם הישר הנתון .

ג. נסמן ב- q את מנת הסדרה $w_1, w_2, w_3, ...$. $w_4 = -2\sqrt{2} \cdot iw_1 \Leftarrow w_1 \cdot q^3 = -2\sqrt{2} \cdot iw_1 \Leftarrow$

$q^3 = -2\sqrt{2} \cdot i$. ההצגה הטריגונומטרית של המספר $-2\sqrt{2} \cdot i$ היא: $R = 2\sqrt{2}$, $\theta = 270^\circ$.

מקבלים: $q^3 = 2\sqrt{2}\text{cis}(270^\circ + 360^\circ k) \Rightarrow q_k = \sqrt{2}\text{cis}(90^\circ + 120^\circ k)$

הפתרונות: $\mathbf{q_1 = \sqrt{2}cis(90^o)}$, $\mathbf{q_2 = \sqrt{2}cis(210^o)}$, $\mathbf{q_3 = \sqrt{2}cis(330^o)}$

ד. 1) ומנת הסדרה היא המספר המדומה הטהור $q = \sqrt{2}\text{cis}(90^o)$. לכן :

$$w_{4n+1} = w_1 q^{4n} = w_1(\sqrt{2}\text{cis}90^\circ)^{4n} = w_1 \cdot 4^n \cdot \left[(\text{cis}90^\circ)^4\right]^n =$$

$$= w_1 \cdot 4^n \cdot (\text{cis}0^\circ)^n = w_1 \cdot 4^n \cdot 1 \Rightarrow \mathbf{w_{4n+1} = w_1 \cdot 4^n}$$

2) $$w_{4n+3} = w_{4n+1} \cdot q^2 = w_1 \cdot 4^n \cdot (\text{cis}90^\circ)^2 = w_1 \cdot 4^n \cdot (\text{cis}180^\circ) \Rightarrow \mathbf{w_{4n+3} = -\,w_1 \cdot 4^n}$$

$$= w_1 \cdot 4^n \cdot (\text{cis}0^\circ)^n = w_1 \cdot 4^n \cdot 1 \Rightarrow \mathbf{w_{4n+1} = w_1 \cdot 4^n}$$

3) האיבר הראשון בסדרה הוא $w_1 = 1 - i$ ומנת הסדרה היא

המספר המדומה הטהור $\sqrt{2}\text{cis}(90^o)$.

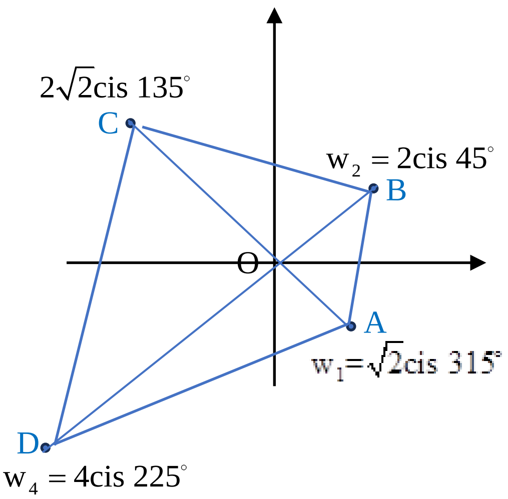
ההצגה הטריגונומטרית של $w_1 = 1 - i$:

$R = \sqrt{2}$, $\tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = -45^\circ + 180^\circ k$.

המספר נמצא ברביע הרביעי לכן

$\theta = 315^\circ \Leftarrow 270^\circ < \theta < 360^\circ$.

מקבלים : $w_1 = \sqrt{2}\text{cis } 315^\circ$.



$w_2 = 2\text{cis } 45^\circ \Leftarrow w_2 = \sqrt{2}\text{cis } 315^\circ \cdot \sqrt{2}\text{cis } 90^\circ \Leftarrow$

$w_3 = 2\sqrt{2}\text{cis } 135^\circ \Leftarrow w_3 = 2\text{cis } 45^\circ \cdot \sqrt{2}\text{cis } 90^\circ \Leftarrow$

$w_4 = 4\text{cis } 225^\circ \Leftarrow w_4 = 2\sqrt{2}\text{cis } 135^\circ \cdot \sqrt{2}\text{cis } 90^\circ \Leftarrow$

נסמן את קודקודי המרובע ב- A , B , C ו- D (ראו ציור) . O ראשית הצירים.

מתקיים: $\measuredangle AOB = \measuredangle BOC = \measuredangle COD = \measuredangle DOA = 90^o$,

$OA = \sqrt{2}$, $OB = 2$, $OC = 2\sqrt{2}$, $OD = 4$.

מקבלים: $S_{\Delta AOB} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2}{2} = \sqrt{2}$, $S_{\Delta BOC} = \dfrac{2\cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$,

$S_{\Delta DOA} = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, $S_{\Delta COD} = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot 4}{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{S_{ABCD} = 9\sqrt{2}}$

פתרון שאלה מס' 4

א. 1) הפונקציה מוגדרת לכל ערך של x לכן **אין** לה אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x .

אין אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y $\Rightarrow$ $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to \pm\infty$

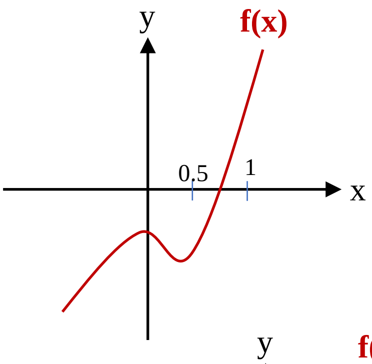
2) $f(x) = 2xe^{2x} - e^{2x} - 2ex^2 \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} - 4ex = 4xe^{2x} - 4ex$

$\Rightarrow f'(x) = 4x(e^{2x} - e) = 0 \Rightarrow x = 0,\ e^{2x} = e \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$f(0) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = -1.36$

x	x <	0	< x <	0.5	< x
f '(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	Max	↘	min	↗

מקבלים: **(0;-1) נקודת מקסימום** , **$(\frac{1}{2};-1.36)$ נקודת מינימום**



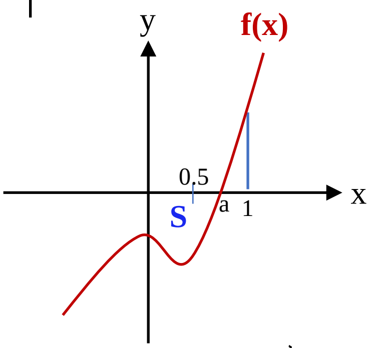
3) $f(1) = 2e^2 - e^2 - 2e = \mathbf{e^2 - 2e \approx 1.95}$ (4

5) הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום x < 0.5 הוא 1 –

בתחום x > 0.5 הפונקציה עולה, f(0.5) < 0 ו- f(1) > 0

לכן הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד (a;0)

ומתקיים **0.5 < a < 1** .



6) נתון: $\int_0^1 f(x)d(x) = -0.81$.

האינטגרל צובר ערכים שליליים בתחום

0 < x < a שסכומם S - וערכים חיוביים

בתחום $a < x < 1$ שסכומם הוא השטח המוגבל
בין גרף הפונקציה , ציר ה- x והישר $x = 1$. נסמן שטח זה ב- T .
על פי הנתון : $-S + T = -0.81$.
מקבלים: $T = \mathbf{S - 0.81}$

ב. 1) $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. הפונקציה f(x) מוגדרת לכל ערך של x , לכן g(x) מוגדרת כאשר $f(x) \neq 0$.

$$x \to a \Rightarrow f(x) \to 0 \Rightarrow g(x) \to \pm\infty \Rightarrow$$

הישר $\mathbf{x = a}$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x .

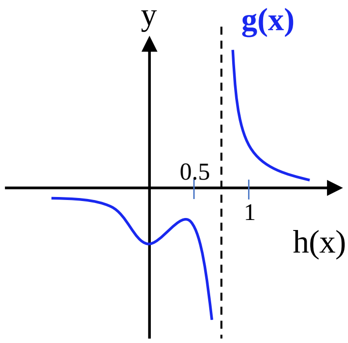
$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to \pm\infty \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to 0 \Rightarrow$ הישר $\mathbf{y = 0}$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y

2) $g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ לכן, תחומי העלייה והירידה של g(x) הפוכים לאלה של f(x) .

מקבלים : בנקודה $x = 0$ יש לפונקציה g(x) נקודת מינימום ובנקודה שבה $x = 0.5$
יש לפונקציה g(x) נקודת מקסימום. $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = -1,\ g(0.5) = \dfrac{1}{f(0.5)} = -0.735$.

מקבלים: **(0;-1) מינימום , (0.5;-0.735) מקסימום**

3)



ג. 1) תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$:

$f(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq a \Rightarrow$ **$x < a$ או $x > a$**

2) $h(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{(0;0), (\tfrac{1}{2};0)}$

3)

x	x <	0	< x <	0.5	< x <	a	< x
f '(x)	+	0	-	0	+		+
f(x)	-	-	-	-	-		+
h(x)	**-**	**0**	+	**0**	**-**		+

¶

תחום החיוביות: $0 < x < 0.5$, $x > a$ **תחום השליליות: $x < 0$, $0.5 < x < a$**

4) הפונקציה h(x) חותכת את ציר ה- x בנקודות בהן $x = 0$ ו- $x = 0.5$. הפונקציה חיובית
בתחום $0 < x < 0.5$ לכן , השטח המוגבל בין גרף הפונקציה h(x) וציר ה- x הוא:

$$\int_0^{0.5} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \Big[\ln|f(x)|\Big]_0^{0.5} = \ln|f(0.5)| - \ln|f(0)| = \ln(1.36) - \ln(1) = \mathbf{0.307}$$

פתרון שאלה מס' 5

א. 1) תחום ההגדרה: $\mathbf{x > 0}$.

2) נקודה ריקה $(0;0)$ $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to 0 \Rightarrow (0;0)$. **אין** אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x

אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow$

3) $x > 0$ לכן אין חיתוך עם ציר ה- y .

חיתוך עם ציר ה- x : $0 = ax(\ln x - 1) \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \Rightarrow \mathbf{(e;0)}$

4) נתון: $f(3.5912) = 1$ לכן: $1 = 3.5912 \cdot a\left[\ln(3.5912) - 1\right] \Rightarrow \mathbf{a = 1}$

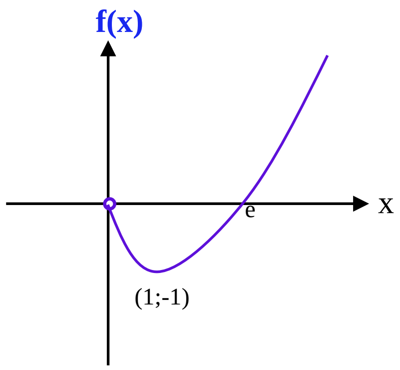
5) $f(x) = x(\ln x - 1) \Rightarrow f'(x) = \ln x - 1 + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \ln x$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = -1$

x	x <	0	< x <	1	< x
f '(x)			-	0	+
f(x)			↘	min	↗

מקבלים: **(1;-1) נקודת מינימום**

6)



ב. 1) תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x) = \ln|f(x)|$:

$|f(x)| > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq e \Rightarrow \mathbf{0 < x < e \ ,\ x > e}$

2) אסימפטוטה $\mathbf{x = e}$ $x \to e \Rightarrow f(x) \to 0 \Rightarrow \ln|f(x)| \to -\infty \Rightarrow \mathbf{x = e}$

אסימפטוטה $\mathbf{x = 0}$ $x \to 0^+ \Rightarrow |f(x)| \to 0 \Rightarrow \ln|f(x)| \to -\infty \Rightarrow \mathbf{x = 0}$

אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $x \to \infty \Rightarrow |f(x)| \to \infty \Rightarrow \ln|f(x)| \to \infty \Rightarrow$

3) בתחום בו $f(x)$ חיובית ועולה בתחום $x > e$, לכן: $f(x) > 0$ וגם $f'(x) > 0$.

$g(x) = \ln\left(f(x)\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. לכן $g'(x) > 0$ בתחום זה.

בתחום בו $f(x)$ שלילית, כלומר בתחום $0 < x < e$:

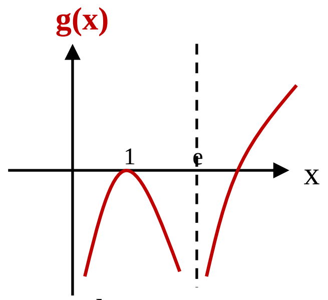
$g(x) = \ln\left(-f(x)\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{-f'(x)}{-f(x)} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

בתחום בו $f'(x)$ חיובית, $g'(x)$ שלילית ולהיפך. מקבלים:

x	x <	0	< x <	1	< x <	e	< x
f '(x)			-	0	+		+

$g'(x)$		+	0	-		+
$g(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$		$\nearrow$

תחומי העלייה של $g(x)$: $0<x<1\,,\,x>e$, תחום הירידה : $1<x<e$



4) **(1;0) נקודת מקסימום** $\Leftarrow g(1)=\ln|f(1)|=\ln(1)=0$ (5

ג. 1) תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)=\dfrac{\ln x}{x(\ln x-1)}$:

$x>0$ וגם $\ln x\neq 1$ כלומר $x\neq e$:

$\mathbf{0<x<e\,,\,x>e}$

2) **x = 0** אסימפטוטה $h(x)=\dfrac{\ln x}{f(x)}\Rightarrow x\to 0^+\Rightarrow \ln x\to -\infty,\ f(x)<0\Rightarrow h(x)\to\infty\Rightarrow$

x = e אסימפטוטה $x\to e^+\Rightarrow h(x)\to\infty, x\to e^-\Rightarrow h(x)\to-\infty\Rightarrow$

y = 0 אסימפטוטה $x\to\infty\Rightarrow h(x)\to 0\Rightarrow$

3) $h(x)$ לא מוגדרת עבור $x=0$ לכן אין חיתוך עם ציר y .

$h(x)=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=1\Rightarrow$ **(1;0)**

4) $h(x)=\dfrac{\ln x}{x(\ln x-1)}=\dfrac{\ln x}{f(x)}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot f(x)-\ln x\cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$.

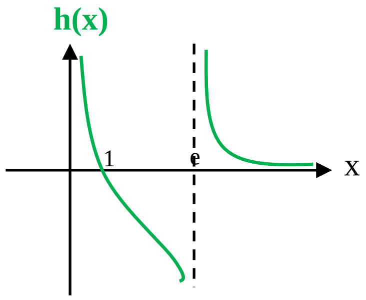
בסעיף א' מצאנו כי: $f(x)=x(\ln x-1)$ ו- $f'(x)=\ln x$. לכן:

$$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x(\ln x-1)-\ln x\cdot\ln x}{[f(x)]^2}=\frac{\ln x-1-\ln^2 x}{[f(x)]^2}\Rightarrow h'(x)=\frac{-\ln^2 x+\ln x-1}{[f(x)]^2}$$

$h'(x)=0\Rightarrow -\ln^2 x+\ln x-1=0$. אם נסמן $\ln x=t$ תתקבל המשוואה הריבועית

$-t^2+t-1=0$ ואין פתרון למשוואה. היות והפונקציה $y=-t^2+t-1$ שלילית לכל ערך של t

הרי שהנגזרת $h'(x)$ תהיה שלילית בכל התחומים בהם הפונקציה $h(x)$ מוגדרת:



5) **תחומי הירידה : $0<x<e\,,\,x>e$, תחומי עלייה: אף x**

ד. $k'(x)=h(x)\Rightarrow k(x)=\int h(x)dx+c=0\Rightarrow$

$$k(x)=\int\frac{\ln x}{x(\ln x-1)}dx+c=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx+c=\ln|f(x)|+c$$

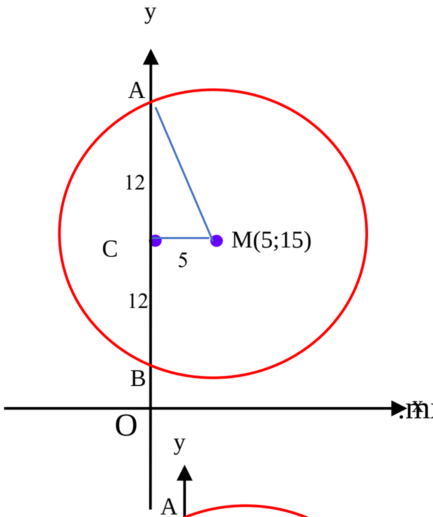
נתון: $k(e^{1.5})=1.5-\ln 2$. מקבלים:

$$1.5-\ln 2=\ln|f(e^{1.5})|+c=\ln|e^{1.5}\cdot 0.5|+c=1.5+\ln 2^{-1}+c=1.5-\ln 2+c\Rightarrow c=0$$

מקבלים: $k(x)=\ln|f(x)|\Rightarrow \mathbf{k(x)=\ln|x(\ln x-1)|}$

מבחן מס' 2

פתרון שאלה מס' 1



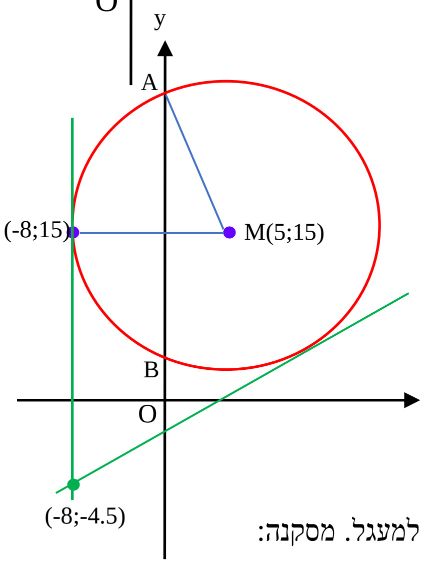
א. נסמן את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y ב- A ו- B.
אורך המיתר AB הוא 24. האנך ממרכז המעגל M(5;15) למיתר AB
מקביל לציר ה- x , אורכו 5 והוא חוצה את המיתר AB בנקודה C.
מקבלים : $MC \perp AB$, $MC = 5$, $AC = 12$. הקטע MA
הוא רדיוס במעגל M . מקבלים: $MA^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow R = 13$
משוואת המעגל M : $\mathbf{(x-5)^2 + (y-15)^2 = 169}$

ב. 1) נסמן ב- m את שיפוע המשיק שיוצא מן הנקודה (-8;-4.5) למעגל M.
משוואת המשיק היא: $y + 4.5 = m(x + 8) \Rightarrow mx - y + 8m - 4.5 = 0$
מרחק המשיק ממרכז המעגל M הוא 13 , לכן:

$$\frac{|5m-15+8m-4.5|}{\sqrt{m^2+1}} = 13 \Rightarrow |13m-19.5| = 13\sqrt{m^2+1} \Rightarrow$$

$$|m-1.5| = \sqrt{m^2+1} \Rightarrow m^2 - 3m + 2.25 = m^2 + 1 \Rightarrow$$

$$-3m = -1.25 \Rightarrow m = \frac{5}{12} \Rightarrow$$

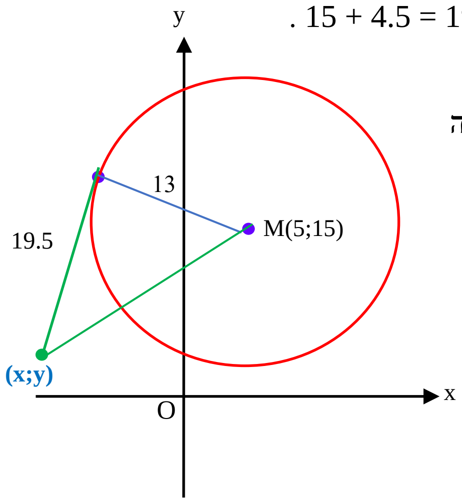


מתקבל המשיק:

$$y + 4.5 = \frac{5}{12}(x+8) \Rightarrow 12y + 54 = 5x + 40 \Rightarrow \mathbf{12y - 5x + 14 = 0}$$

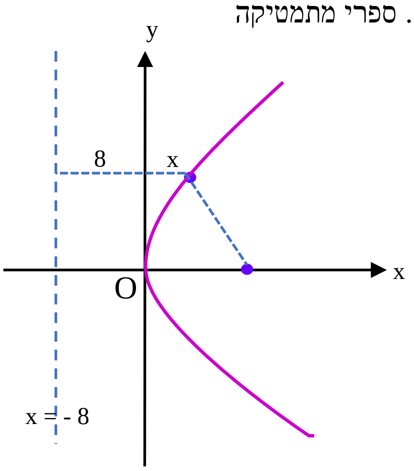
התקבלה רק משוואה אחת , אך מכל נקודה מחוץ למעגל יוצאים שני משיקים למעגל. מסקנה:
המשיק השני הוא בעל שיפוע לא מוגדר, כלומר, ישר המקביל לציר ה- y .
משוואת הישר המקביל לציר ה- y העובר בנקודה (-8;-4.5) היא $x = -8$.
אכן, מרחקו של ישר זה מן הנקודה M(5;15) הוא 13 .

2) הישר $x = -8$ משיק למעגל M בנקודה (-8;15) . אורך המשיק הוא $15 + 4.5 = 19.5$.
אורכי שני המשיקים שווים ל- 19.5.



3) נסמן ב- (x;y) נקודה כללית על המקום הגיאומטרי המבוקש ונבטא בעזרתה
את אורך המשיק היוצא ממנה למעגל M:
$19.5^2 + 13^2 = (x-5)^2 + (y-15)^2$ מתקבלת המשוואה:
$\mathbf{(x-5)^2 + (y-15)^2 = 549.25}$ המייצגת מעגל שמרכזו בנקודה
(5;15) ורדיוסו $\sqrt{549.25} \approx 23.44$.

ג. 1) מדריך הפרבולה $y^2 = 2px$ הוא הישר $x = -\frac{p}{2}$, לכן ,



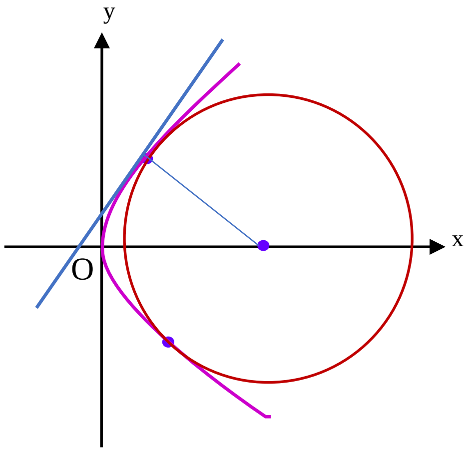
הישר $x = -8$ הוא מדריך הפרבולה.

מקבלים $p = 16$ ומשוואת הפרבולה היא $\mathbf{y^2 = 32x}$.

2) מרחק כל נקודה על הפרבולה ממוקד הפרבולה שווה למרחקה מן המדריך.

מקבלים: $x + 8 = 13 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y^2 = 32 \cdot 5 \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{10}$

מתקבלות הנקודות: $\mathbf{\left(5;4\sqrt{10}\right),\left(5;-4\sqrt{10}\right)}$



3) הפרבולה סימטרית ביחס לציר ה- x לכן מעגל המשיק

לפרבולה בשתי נקודות הוא מעגל שמרכזו על ציר ה- x .

המשיק לפרבולה בנקודות שמצאנו קודם משיק גם למעגל.

נמצא את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה $\left(5;4\sqrt{10}\right)$:

$4\sqrt{10}y = 16(x+5) \Leftarrow$ שיפוע המשיק הוא $\frac{4}{\sqrt{10}}$

לכן שיפוע הרדיוס הוא $-\frac{\sqrt{10}}{4}$.

משוואת הרדיוס בנקודה $\left(5;4\sqrt{10}\right)$:

$y - 4\sqrt{10} = -\frac{\sqrt{10}}{4}(x-5)$. נמצא את נקודת החיתוך

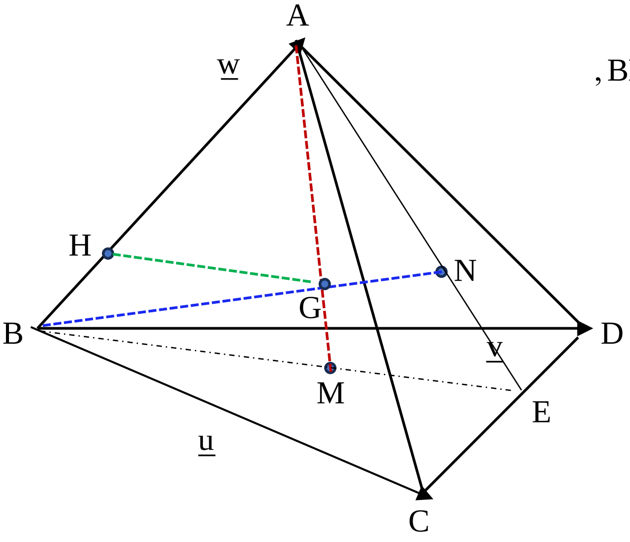
של הישר עם ציר ה- x :

$-4\sqrt{10} = -\frac{\sqrt{10}}{4}(x-5) \Rightarrow -16\sqrt{10} = -\sqrt{10}(x-5) \Rightarrow x-5 = 16 \Rightarrow x = 21$.

מרכז המעגל הוא $(21;0)$. רדיוס המעגל: $R^2 = (5-21)^2 + \left(4\sqrt{10}\right)^2 = 416$.

משוואת המעגל: $\mathbf{(x-21)^2 + y^2 = 416}$

פתרון שאלה מס' 2



א. 1) נסמן ב- E את אמצע המקצוע CD . נקבל: AE ו- BE
תיכונים במשולשים ACD ו- BCD בהתאמה.

M נקודת מפגש התיכונים במשולש BCD לכן $BM = \frac{2}{3}BE$,

N מפגש התיכונים במשולש ACD לכן $AN = \frac{2}{3}AE$.

מקבלים: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} = -\underline{w} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}) =$

$$-\underline{w} + \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = -\underline{w} + \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}(-\underline{u} + \underline{v}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \underline{w}}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \underline{w} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}) =$$

$$\underline{w} - \frac{2}{3}\underline{w} + \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}(-\underline{u} + \underline{v}) \Rightarrow \mathbf{\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}}$$

2) נסמן : $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BG} = b\overrightarrow{BN}$. מקבלים:

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} = \underline{0} \Rightarrow a\overrightarrow{AM} - b\overrightarrow{BN} + \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$a\left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \underline{w}\right) - b\left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}\right) + \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{3}\right)\underline{u} + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{3}\right)\underline{v} + \left(-a - \frac{b}{3} + 1\right)\underline{w} = 0\underline{u} + 0\underline{v} + 0\underline{w} \Rightarrow$$

בגלל יחידות ההצגה מקבלים:

$\frac{a}{3} - \frac{b}{3} = 0$ וגם $-a - \frac{b}{3} + 1 = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow -a - \frac{a}{3} + 1 = 0 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = b = \frac{3}{4}$

קיבלנו: AG:GM = 3:1 , BG:GN = 3:1

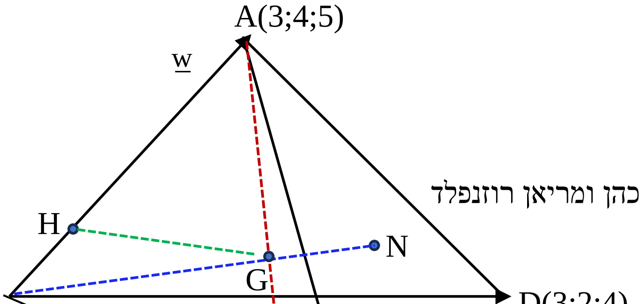
3) $AH = 3BH \Rightarrow \overrightarrow{HA} = \frac{3}{4}\underline{w}$, $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{4}\underline{w}$. $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AG} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{HG} = \frac{3}{4}\underline{w} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\underline{w} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \underline{w}\right) = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} \Rightarrow$$

הווקטור $\overrightarrow{HG}$ הוא קומבינציה ליניארית של שני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בלבד , הקובעים
את מישור המשולש BCD . $\overrightarrow{HG}$ לא נמצא במישור , לכן הוא מקביל למישור BCD.

ב. 1) $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = (2;3;1)$, $\underline{v} = \overrightarrow{BD} = (1;-1;2)$, $\underline{w} = \overrightarrow{BA} = (1;1;3)$

הווקטור (A;B;C) המאונך למישור BCD מאונך
לווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, לכן:



$(A;B;C)\cdot(1;-1;2) = 0$ וגם $(A;B;C)\cdot(2;3;1) = 0$

$\Leftarrow$ $2A + 3B + C = 0$ וגם $A - B + 2C = 0$

$\Leftarrow$ $3A - 3B + 6C = 0$ $\Leftarrow$

$5A + 7C = 0 \Leftarrow A = -\frac{7C}{5} \Leftarrow$

נבחר $C = -5 \Leftarrow A = 7 \Leftarrow 7 - B - 10 = 0$

$\Leftarrow$ $B = -3$. מקבלים: $7x - 3y - 5z + D = 0$

נציב את שיעורי הנקודה B ונקבל: $14 - 9 - 10 + D = 0$

$\Leftarrow$ $D = 5 \Leftarrow$ משוואת המישור BCD : $7x - 3y - 5z + 5 = 0$

2) $$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \underline{w}\right) = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} - \frac{3}{4}\underline{w} = \frac{1}{4}\left(\underline{u} + \underline{v} - 3\underline{w}\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AG} = = \frac{1}{4}\left(\underline{u} + \underline{v} - 3\underline{w}\right) \Rightarrow \frac{1}{4}\left[(2;3;1) + (1;-1;2) - 3(1;1;3)\right] = \frac{1}{4}(0;-1;-6) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AG} = (0;-\frac{1}{4};-\frac{3}{2}) \Rightarrow x_G - 3 = 0 \ , \ y_G - 4 = -\frac{1}{4} \ , \ z_G - 5 = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_G = 3 \ , \ y_G = \frac{15}{4} \ , \ z_G = \frac{7}{2} \Rightarrow \mathbf{G}\left(\mathbf{3};\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}};\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\underline{w} = \frac{1}{4}(1;1;3) = \left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right) \Rightarrow x_H - 2 = \frac{1}{4} \ , \ y_H - 3 = \frac{1}{4} \ , \ z_H - 2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}\left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}};\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}};\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{4}}\right)$$

3) ווקטור הכיוון של הישר HG הוא :

$\overrightarrow{HG} = \left(3-\frac{9}{4};\frac{15}{4}-\frac{13}{4};\frac{7}{2}-\frac{11}{4}\right) = \left(\frac{3}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}(3;2;3)$. מתקיים:

ההצגה הפרמטרית של הישר HG היא : $\underline{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{3};\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}};\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right) + \mathbf{t(3;2;3)}$

$(7;-3;-5)\cdot(3;2;3) = 21 - 6 - 15 = 0$ כלומר , ווקטור הכיוון של הישר מאונך לווקטור המאונך למישור . הישר אינו מוכל במישור , לכן , הישר HG מקביל למישור BCD .

דרך נוספת: נקודה כללית על הישר היא מהצורה $\left(3 + 3t;\frac{15}{4} + 2t;\frac{7}{2} + 3t\right)$.

נציב את שיעוריה במשוואת המישור

BCD ונקבל: $7(3 + 3t) - 3\left(\frac{15}{4} + 2t\right) - 5\left(\frac{7}{2} + 3t\right) + 5 = 0 \Leftarrow$.

$21 + 21t - \frac{45}{4} - 6t - \frac{35}{2} - 15t + 5 = 0 \Rightarrow 0t = \frac{11}{4} \Rightarrow$ אין פתרון

אין לישר HG נקודה משותפת עם המישור BCD , לכן הוא מקביל למישור

4) ההצגה הפרמטרית של הישר HG היא : $\underline{x} = \left(3;\frac{15}{4};\frac{7}{2}\right) + t(3;2;3)$.

וקטור הכיוון של הישר AD הוא : $\overrightarrow{AD} = (3-3;2-4;4-5) = (0;-2;-1)$.

ההצגה הפרמטרית של הישר AD היא : $\underline{x} = (3;4;5) + r(0;-2;-1)$.

היות ולא קיים α כך ש- $\alpha(0;-2;-1) = (3;2;3)$, הרי שהישרים נחתכים או מצטלבים .

נבדוק את פתרונות המערכת:

$$3+3t = 3\ ,\ \frac{15}{4}+2t = 4-2r\ ,\ \frac{7}{2}+3t = 5-r \Rightarrow t = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{8} \text{ וגם } r = 1.5$$

אין פתרון למערכת , לכן , הישרים מצטלבים .

הזווית θ בין הישרים היא הזווית החדה בין ווקטורי הכיוון :

$$\cos\theta = \frac{|(3;2;3)\cdot(0;-2;-1)|}{\sqrt{9+4+9}\cdot\sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{22\cdot\sqrt{5}}} \Rightarrow \theta = \mathbf{48.13^o}$$

5) המישור π מכיל את הישר HG לכן הנקודה $G\left(3;\frac{15}{4};\frac{7}{2}\right)$ היא נקודה במישור והווקטור (3;2;3)

הוא אחד מווקטורי הכיוון של המישור. המישור π גם מאונך למישור $7x - 3y - 5z + 5 = 0$ לכן

הווקטור (7;-3;-5) הוא ווקטור כיוון נוסף של המישור.

נמצא את הווקטור (A;B;C) המאונך למישור π:

$(A;B;C)\cdot(3;2;3) = 0$ וגם $(A;B;C)\cdot(7;-3;-5) = 0$

$\Leftarrow$ $3A + 2B + 3C = 0$ וגם $7A - 3B - 5C = 0$

$\Leftarrow$ $9A + 6B + 9C = 0$ וגם $14A - 6B - 10C = 0$

$\Leftarrow$ $23A - C = 0$ $\Leftarrow$ $C = 23A$

נבחר $A = 1 \Leftarrow C = 23 \Leftarrow 3 + 2B + 69 = 0 \Leftarrow B = -36$.

מקבלים: $x - 36y + 23z + D = 0$

נציב את שיעורי הנקודה G ונקבל: $3 - 36\cdot\frac{15}{4} + 23\cdot\frac{7}{2} + D = 0 \Rightarrow D = 51.5$

$\Leftarrow$ משוואת המישור π : $x - 36y + 23z + 51.5 = 0$

6) הנקודות על ישר החיתוך מקיימות את מערכת המשוואות $x - 36y + 23z + 51.5 = 0$

וגם $7x - 3y - 5z + 5 = 0$:

$x - 36y + 23z + 51.5 = 0$ וגם $84x - 36y - 60z + 60 = 0 \Leftarrow 83x - 83z + 8.5 = 0$

$\Leftarrow x = -\frac{17}{166} + z$. נסמן: $z = m \Leftarrow x = -\frac{17}{166} + m \Leftarrow$

$$7\left(-\frac{17}{166} + m\right) - 3y - 5m + 5 = 0 \Rightarrow -\frac{119}{166} + 7m - 5m + 5 = 3y \Rightarrow 3y = \frac{711}{166} + 2m \Rightarrow$$

$\Leftarrow y = \frac{237}{166} + \frac{2}{3}m$ נקודה כללית על ישר החיתוך היא מהצורה:

$(-\frac{17}{166} + m; \frac{237}{166} + \frac{2}{3}m; m)$

ההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך היא :

$$\Leftarrow \underline{x} = (-\frac{17}{166}; \frac{237}{166}; 0) + m(1; \frac{2}{3}; 1) \Leftarrow \mathbf{\underline{x} = (-\frac{17}{166}; \frac{237}{166}; 0) + n(3; 2; 3)}$$

$$7(0.1-83m) - 3y - 5(85m) + 5 = 0 \Leftarrow 3y = 5.7 - 1006m \Leftarrow y = 1.9 - \frac{1006}{3}m \Leftarrow$$

נקודה כללית על ישר החיתוך היא מהצורה: $\Leftarrow (0.1 - 83m; 1.9 - \frac{1006}{3}m; 85m) \Leftarrow$

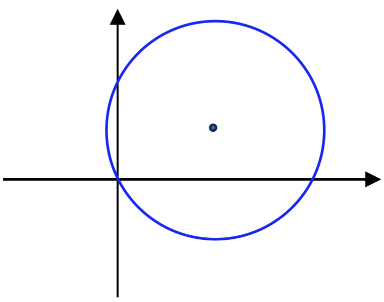
ההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך היא :

$$\Leftarrow (0.1 - 83m; 1.9 - \frac{1006}{3}m; 85m) \Leftarrow \mathbf{\underline{x} = (0.1; 1.9; 0) + m(-83; -\frac{1006}{3}; 85)}$$

פתרון שאלה מס' 3

א. 1) נסמן: $z = x + yi$ ונקבל:

$$\left|x + yi - \sqrt{3} - i\right| = 2 \Rightarrow \left|\left(x - \sqrt{3}\right) + (y-1)i\right| = 2 \Rightarrow$$



$$\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y-1\right)^2}=2\Rightarrow\left(\mathbf{x-\sqrt{3}}\right)^2+\left(\mathbf{y-1}\right)^2=\mathbf{4}$$

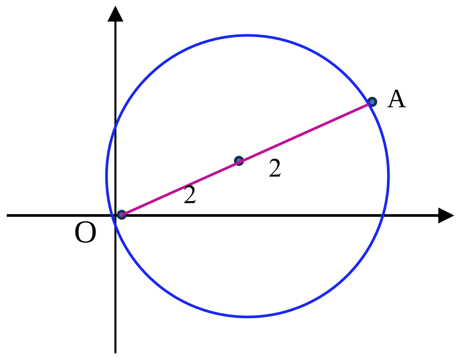
2) נציב $(0;0)$ במשוואת המעגל ונקבל :

$$\left(0-\sqrt{3}\right)^2+\left(0-1\right)^2=3+1=4$$

לכן , המעגל עובר דרך ראשית הצירים.

3) מרכז המעגל נמצא בנקודה $M\left(\sqrt{3};1\right)$.

ההצגה הטריגונומטרית של המספר M היא:



$$R=2,\ \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta=30^\circ+180^\circ k$$

M נמצאת ברביע הראשון לכן $\theta=30^\circ$ ומקבלים $M:\ z_M=2cis30^\circ$. הנקודה A נמצאת על הישר OM ברביע הראשון לכן , מתקיים $\arg(z_A)=30^\circ$. מרחק הנקודה A מראשית הצירים היא 4 לכן מקבלים : $\mathbf{z_A=4cis30^o}$.

144°

ב. 1) נתון : $z_P=rcis\alpha$, $z_{P'}=-\frac{r^2}{z_P}$.

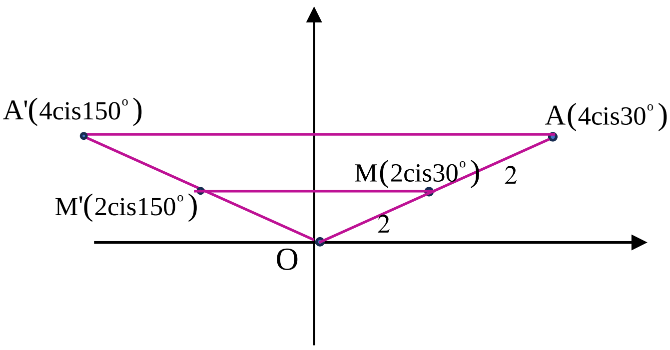
$$z_{P'}=-\frac{r^2}{rcis\alpha}=-\frac{r}{cis\alpha}=-r\left(cis\alpha\right)^{-1}=-1\cdot rcis\left(-\alpha\right)=$$

$$cis180^\circ\cdot rcis\left(-\alpha\right)\Rightarrow\mathbf{z_{P'}=rcis\left(180^o-\alpha\right)}$$

2) $z_A=4cis30^o \Rightarrow z_{A'}=4cis(180^o-30^o)\Rightarrow\mathbf{z_{A'}=4cis150^o}$

$z_M=2cis30^o\Rightarrow\mathbf{z_{M'}=2cis150^o}$

3) $OA=OA'=4$, $OM=OM'=2$,



לכן: , $\measuredangle AOA'=150^o-30^o=120^o$

$$S_{AA'M'M}=S_{AOA'}-S_{\Delta M'OM}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\sin120^o-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin120^o=\mathbf{3\sqrt{3}}$$

ג. 1) מצאנו: $z_A=4cis30^o$. זווית הראש של המשולש ABC היא בת 36^o לכן כל אחת מזוויות הבסיס היא בת 72^o. הזוויות ההיקפיות $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ ו- $\measuredangle C$ הן בהתאמה בנות $36^o, 72^o$ ו- 72^o. לכן :

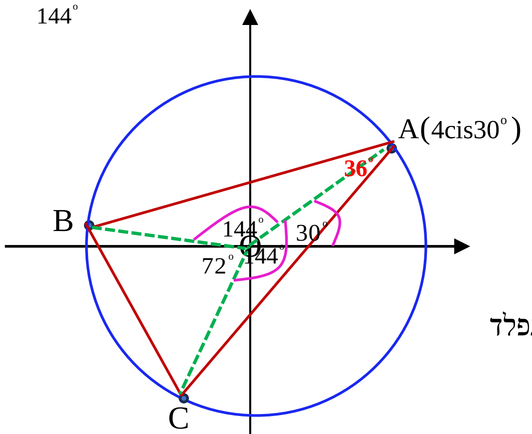
$$\measuredangle AOB=\measuredangle COA=144^o,\ \measuredangle BOC=72^o .$$

הנקודות A, B ו- C נמצאות על מעגל שרדיוסו 4 .

מקבלים: $z_B=4cis(30^o+144^o)\Rightarrow\mathbf{z_B=4cis(174^o)}$.

$z_C=4cis(174^o+72^o)\Rightarrow\mathbf{z_C=4cis(246^o)}$.

144°



2) המספר $4cis(30^o)$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה

$z^5 = a + bi$ לכן מתקיים: $\left(4cis30^\circ\right)^5 = a + bi \Leftarrow$

$z^5 = 1024cis150^\circ = -512\sqrt{3} + 512i \Rightarrow a + bi = 1024cis150^\circ$.

נוודא שגם הקודקודים B ו- C הם פתרונות של המשוואה:

$\left(4cis174\right)^5 = 1024cis870^\circ = 1024cis150^\circ$,

$\left(4cis246\right)^5 = 1024cis1230^\circ = 1024cis150^\circ$

מתקבלת המשוואה: $\mathbf{z^5 = -512\sqrt{3} + 512i}$

3) פתרונות המשוואה: $z^5 = -512\sqrt{3} + 512 \Rightarrow z^5 = 1024cis\left(150^\circ + 360^\circ k\right) \Rightarrow$

$$z_k = \sqrt[5]{1024}cis\left(\frac{150^\circ}{5} + \frac{360^\circ k}{5}\right) \Rightarrow z_k = 4cis\left(30^\circ + 72^\circ k\right)$$

מתקבלים הפתרונות : $4cis30^\circ, 4cis102^\circ, 4cis174^\circ, 4cis246^\circ, 4cis318^\circ$.

הפתרונות הנוספים הם: $\mathbf{4cis102^o}$ ו- $\mathbf{4cis318^o}$.

<u>פתרון שאלה מס' 4</u>

א. 1) תחום ההגדרה: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$ $\mathbf{x > 0}$ **או** $\mathbf{x < 0}$

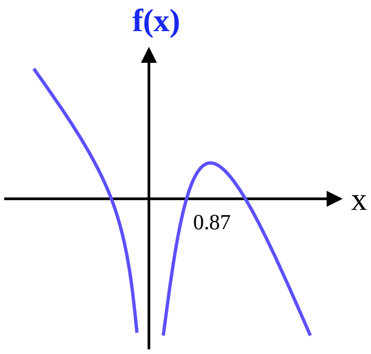
2) $\mathbf{x = 0}$ אסימפטוטה $\Leftarrow$ $x \to 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$

אין אסימפטוטה מאונכת לציר y $\Rightarrow$ $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to -\infty \ , \ x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow$

(3 $f(x) = \ln(x^2) - x^3 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2} - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 3x^4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x\left(2 - 3x^4\right) = 0 \ , \ x \neq 0 \Rightarrow x^3 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.87$, $f(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}) \approx 1.063$

x	x <	0	< x <	0.87	< x
f '(x)	-		+	0	-
f(x)	↘		↗	Max	↘



מקבלים: $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}};1.063\right)$ **נקודת מקסימום** (4

ב. 1) גרף הפונקציה f(x) חותך את ציר ה- x בשלוש נקודות ואינו משיק לציר ה- x , לכן , לפונקציה הקדומה F(x) יש **שלוש נקודות קיצון**.

2) $f(-\infty) \to \infty, f(0^-) \to -\infty$ והפונקציה f(x) יורדת בתחום $x < 0$, לכן גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום זה. לפונקציה הקדומה F(x) **נקודת מקסימום בתחום x < 0.**

גרף הפונקציה f(x) חותך את ציר ה-x בתחום $0 < x < 0.87$ $\Leftarrow$ $f(0^+) \to -\infty, f(0.87) > 0$

לכן , לפונקציה F(x) יש **נקודת מינימום בתחום $0 < x < 0.87$** .

גרף הפונקציה f(x) חותך את ציר ה-x בתחום $0.87 < x < \infty$ $\Leftarrow$ $f(0.87) > 0, f(\infty) \to -\infty$

לכן , לפונקציה F(x) יש **נקודת מקסימום בתחום $x > 0.87$** .

3) לפונקציה f(x) יש נקודת קיצון אחת בנקודה שבה x = 0.87 :

x	x <	0	< x <	0.87	< x
f '(x) = F''(x)	-		+	0	-
F(x)	∩		∪	פיתול	∩

לכן, לפונקציה F(x) יש **נקודת פיתול אחת.**

ג. 1) הפונקציה $g(x) = e^{f(x)}$ מוגדרת בכל תחום בו f(x) מוגדרת , כלומר בתחום: **$x < 0$ או $x > 0$**

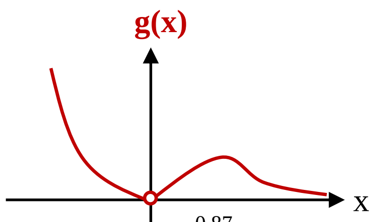
(2 $g(x) = e^{\ln(x^2) - x^3 + 2} = e^{\ln(x^2)} \cdot e^{-x^3} \cdot e^2 = x^2 \cdot e^{-x^3} \cdot e^2 \Rightarrow \mathbf{g(x) = e^2 x^2 e^{-x^3}}$

(3 $g(x) = e^{f(x)} \Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Rightarrow g(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}) = e^{1.063} = 2.895$.

$e^{f(x)} > 0$ בכל תחום ההגדרה של g(x) , לכן, תחומי החיוביות והשליליות של g'(x) זהים לאלה של f '(x) . מקבלים : $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}};2.895\right)$ **נקודת מקסימום** של g(x)

(4 (0;0) נקודת אי- רציפות $x \to 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty \Rightarrow e^{f(x)} \to 0 \Rightarrow$



אסימפטוטה מאונכת לציר y $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to -\infty \Rightarrow g(x) \to 0 \Rightarrow \mathbf{y = 0}$

אין אסימפטוטה מאונכת לציר y $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to \infty \Rightarrow g(x) \to \infty \Rightarrow$ (5

ד. 1) הפונקציה $g(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה , לכן הפונקציה הקדומה $G(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.

תחום העלייה: $x < 0$ או $x > 0$, תחום ירידה: אף x

2) $G(x) = \int g(x)\ d(x) = \int e^2x^2e^{-x^3} d(x) = -\frac{e^2}{3} \int -3x^2e^{-x^3} d(x) =$

$-\frac{e^2}{3} \cdot e^{-x^3} + c \Rightarrow G(x) = -\frac{1}{3} e^{-x^3+2} + c$

אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $\Rightarrow$ $x \to -\infty \Rightarrow G(x) \to -\infty$

$x \to \infty \Rightarrow G(x) \to c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \mathbf{G(x) = -\frac{1}{3}e^{-x^3+2} + 1}$

פתרון שאלה מס' 5

א. 1) תחום ההגדרה: $x > 0$ וגם $\ln^2 x - \ln x - 2 \neq 0 \Leftarrow$ נסמן $\ln x = t$ ונקבל

$t^2 - t - 2 \neq 0 \Rightarrow t \neq 2, t \neq -1 \Rightarrow \ln x \neq 2 \Rightarrow x \neq e^2, \ln x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{e}$

תחום ההגדרה הוא : $x \neq e^2, x \neq \frac{1}{e} \Rightarrow \mathbf{0 < x < \frac{1}{e}, \frac{1}{e} < x < e^2, x > e^2}$

2) **$x = 0$** אסימפטוטה $\Rightarrow$ $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$x=\frac{1}{e}$ אסימפטוטה $x\to\left(\frac{1}{e}\right)^{-}\Rightarrow f(x)\to-\infty,\ x\to\left(\frac{1}{e}\right)^{+}\Rightarrow f(x)\to-\infty$

$x=e^2$ אסימפטוטה $x\to\left(e^2\right)^{-}\Rightarrow f(x)\to-\infty,\ x\to\left(e^2\right)^{+}\Rightarrow f(x)\to\infty\Rightarrow$

$y=0$ אסימפטוטה $x\to\infty\Rightarrow f(x)\to0\Rightarrow$

3) אין חיתוך עם ציר y . חיתוך עם ציר x :

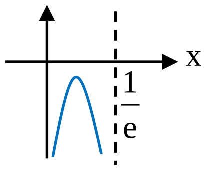
4) $f(x)=0\Rightarrow2\ln x-1=0\Rightarrow\ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{e}\Rightarrow(\sqrt{e};0)$

x	x <	0	< x <	$\frac{1}{e}$	< x <	$\sqrt{e}$	< x <	e^2	< x
f(x)			-		+	0	-		+

תחומי החיוביות: $\frac{1}{e}<x<e\ ,\ x>e^2$, **תחומי השליליות:** $0<x<\frac{1}{e},e<x<e^2$

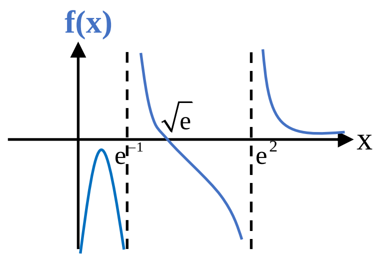
5) הפונקציה שלילית בכל התחום בין אסימפטוטות האנכיות $x=0$ ו- $x=\frac{1}{e}$.

$x\to0^{+}\Rightarrow f(x)\to-\infty\ ,\ x\to\left(\frac{1}{e}\right)^{-}\Rightarrow f(x)\to-\infty$



מסקנה: **לפונקציה f(x) יש נקודת מקסימום בתחום** $0<x<\frac{1}{e}$

(6



ב. 1)

x	x <	0	< x <	$\frac{1}{e}$	< x <	$\sqrt{e}$	< x <	e^2	< x
g'(x) = f(x)			-		+	0	-		+
g(x)			↘		↗	Max	↘		↗

תחומי העלייה של g(x) : $\frac{1}{e}<x<\sqrt{e},x>e^2$

תחומי הירידה של g(x) : $0<x<\frac{1}{e},\sqrt{e}<x<e^2$

2) הישר $y=1$ ששיפועו 0 משיק לגרף הפונקציה g(x) בנקודת **המקסימום שלה:** $\left(\sqrt{e};1\right)$.

3) $g(x)=\int f(x)dx=\int\frac{2\ln x-1}{x(\ln^2 x-\ln x-2)}dx$

אם נסמן $h(x)=\ln^2 x - \ln x-2$ נקבל: $h'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x}=\frac{1}{x}(2\ln x-1)$

מקבלים: $g(x)=\int\frac{2\ln x-1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x - \ln x-2}dx=\int\frac{h'(x)}{h(x)}dx=\ln|h(x)|+c\Rightarrow$

$g(x)=\ln\left|\ln^2 x - \ln x-2\right|+c$. נציב את שיעורי הנקודה $(\sqrt{e};1)$ ונקבל:

$$1=\ln\left|\left(\ln\sqrt{e}\right)^2 - \ln\sqrt{e}-2\right|+c\Rightarrow 1=\ln\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}-2\right|+c\Rightarrow c=1-\ln 2.25$$

$\mathbf{g(x)=\ln\left|\ln^2x-\ln x-2\right|+1-\ln 2.25}$.

4) $\mathbf{x=0}$ אסימפטוטה $x\to 0^+\Rightarrow g(x)\to\infty\Rightarrow$

$\mathbf{x=\frac{1}{e}}$ אסימפטוטה $x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-\Rightarrow g(x)\to-\infty, x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+\Rightarrow g(x)\to-\infty$

$\mathbf{x=e^2}$ אסימפטוטה $x\to\left(e^2\right)^-\Rightarrow g(x)\to-\infty, x\to\left(e^2\right)^+\Rightarrow g(x)\to-\infty\Rightarrow$

אין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $x\to\infty\Rightarrow g(x)\to\infty\Rightarrow$

5)