

מבחן מס' 1**פתרון שאלה מס' 1**

א.

(1)

נוכיח את נכונות השוויון עבור $n = 1$:

$$n = 1 \quad \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1} = 1 \quad \text{השוויון מתקיים עבור } n = 1$$

נניח שעבור מספר טבעי כלשהו k מתקיים השוויון:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{35} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{3}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{3k}{2k+1}$$

ונוכיח, על סמך ההנחה, כי עבור המספר העוקב $k+1$ מתקיים השוויון:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{35} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{3}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{3(k+1)}{2k+3}$$

$$\text{נותר להוכיח: } 3k(2k+3) + 3 = 3(k+1)(2k+1)$$

$$\Rightarrow 3(2k^2 + 3k + 1) = 3(2k^2 + 3k + 1) \quad \text{הוכחה:}$$

השוויון מתקיים עבור $k+1$.מסקנה: אם השוויון נכון עבור $n = 1$ ומן ההנחה שהוא נכון עבור מספר טבעי כלשהו נובע שהוא נכוןגם עבור המספר העוקב לו, הרי שהוא נכון לכל n טבעי.

$$(2) \text{ נמצא את אברי הסדרה: } 1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{35} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{481} \text{ על-ידי פתרון המשוואה:}$$

$$\frac{3}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{481} \Rightarrow 1443 = 4n^2 - 1 \Rightarrow 1444 = 4n^2 \Rightarrow n = 19$$

$$S_{19} = \frac{3 \cdot 19}{2 \cdot 19 + 1} = \frac{19}{13} \quad \text{על פי סעיף 1) מתקיים}$$

$$S_{19} - S_{14} = \frac{19}{13} - \frac{3 \cdot 14}{2 \cdot 14 + 1} = \frac{19}{13} - \frac{42}{29} = \frac{5}{377} \quad \text{חישוב סכום 5 האיברים האחרונים:}$$

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

ב.

(1) על פי הנתונים בגרף: $f'(-8) = f'(0) = f'(3) = 0$. לכן, יש לגרף הפונקציה $f(x)$ שלושה משיקים המקבילים לציר ה- x .

(2)

x	$x <$	-8	$< x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$	פיתול	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

x	$x <$	-6	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$
$f''(x)$	+		-		+		-
$f(x)$	$\cup$	פיתול	$\cap$	פיתול	$\cup$	פיתול	$\cap$

לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון ושלוש נקודות פיתול

(3) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -6$ הוא 18, לכן, $f'(-6) = 18$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 2$ הוא 9, לכן, $f'(2) = 9$.

ולכן: $B(2;9)$, $A(-6;18)$

(4) משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול בה $x = -6$ היא $y = 18x + 56$ לכן

$$f(-6) = 18(-6) + 56 = -52 \quad \text{מתקבלת נקודת הפיתול } (-6; -52).$$

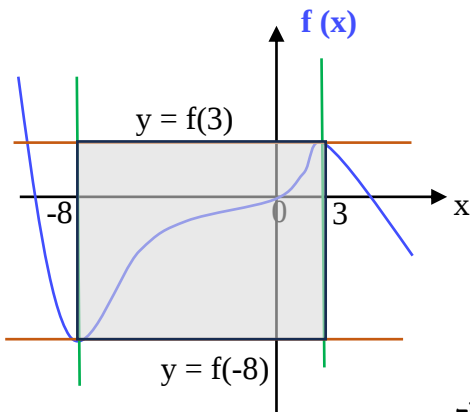
משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול בה $x = 2$ היא $y = 9x - 8$ לכן

$$f(2) = 9 \cdot 2 - 8 = 10 \quad \text{מתקבלת נקודת הפיתול } (2; 10).$$

על פי הנתונים $f'(0) = 0$ ו- $f(0) = 0$, לכן, נקודת פיתול של הפונקציה בראשית הצירים.

(5) בתחום $-8 \leq x \leq 3$ מתקיים $f'(x) \geq 0$, לכן, השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה- x

$$\text{מיוצג על-ידי האינטגרל } \int_{-8}^3 f'(x) dx = 95 \quad \text{מקבלים } f(3) - f(-8) = 95.$$



בנקודה שבה $x = -8$ יש לפונקציה נקודת מינימום. שטח המלבן הנוצר

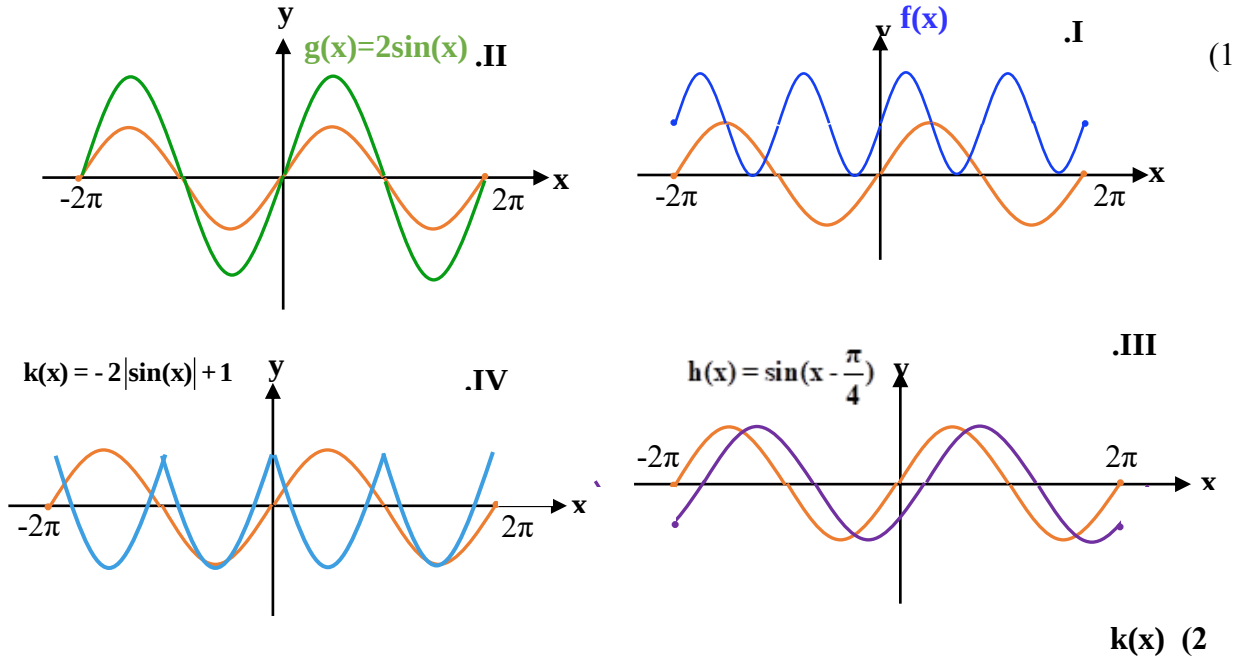
על ידי המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות הקיצון שלה,

הישר $x = 3$ והישר $x = -8$ הוא:

$$(3 + 8)(f(3) - f(-8)) = 11 \cdot 95 = 1045$$

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

ג.



ד.

נסמן ב- R את רדיוס המעגל O

טענה	נימוק
1 $AB = 2R$ קוטר	נתון
2 $\angle ATB = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה
3 $\angle BTE = 30^\circ$	נתון
4 $\angle BAT = 30^\circ$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני
$\Rightarrow \angle ABT = 60^\circ$	סכום זוויות במשולש ATB
5 $TB = \frac{1}{2}AB = R$	הניצב מול הזווית בת 30° שווה למחצית היתר

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

	$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot TB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R \cdot \sin 60^\circ =$ $\frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}R^2}{2}$	
חישוב	$\frac{\sqrt{3}R^2}{2} = 18\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow$ שטח המעגל O : 36π	

פתרון שאלה מס' 2

א. בסדרה ישנם $4n + 1$ איברים, $4n + 1$ הנו מספר אי-זוגי, לכן מקומו של האיבר האמצעי בסדרה

$$\frac{4n+2}{2} = 2n+1 \text{ הוא}$$

נתון: $a_1 \cdot a_{4n+1} = 6561$ וצריך למצוא את a_{2n+1} . מקבלים:

$$a_1 \cdot a_1 \cdot q^{4n} = 6561 \Rightarrow a_1^2 \cdot q^{4n} = 6561 \Rightarrow (a_1 \cdot q^{2n})^2 = 6561 \Rightarrow a_1 \cdot q^{2n} = \pm 81$$

נתון: $a_1 > 0$, $q^{2n} = (q^n)^2 > 0$, לכן, $a_1 \cdot q^{2n} = 81$.

$$\Rightarrow a_{2n+1} = a_1 \cdot q^{2n} = 81$$

ב. נתון: $a_1 q^{2n} = 729 a_1 \Leftarrow q^{2n} = 729$.

סדרת המספרים בסדרה שנמצאים לפני האיבר האמצעי היא: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$.

האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה זו: $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ מהווים סדרה הנדסית

שבה האיבר הראשון הוא a_1 , המנה היא q^2 ומספר האיברים הוא n .

$$\text{לכן, סכומה הוא: } \frac{a_1[(q^2)^n - 1]}{q^2 - 1} \text{ . מקבלים: } 91a_1 = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} \Leftarrow$$

$$\frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = 91 \Rightarrow \frac{729 - 1}{q^2 - 1} = 91 \Rightarrow 728 = 91(q^2 - 1) \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$$

נתון כי הסדרה אינה עולה ואינה יורדת, לכן $q = -3$

$$q^{2n} = 729 \Rightarrow (-3)^{2n} = 729 \Rightarrow (-3)^{2n} = (-3)^6 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow 4n+1 = 13$$

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

$$b_n = \frac{1}{a_{2n}} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{1}{a_{2(n+1)}} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{a_{2n+2}} \cdot \frac{a_{2n}}{1} = \frac{a_{2n}}{a_{2n} \cdot (-3)^2} = \frac{1}{9} \quad (1) \text{ ג.}$$

מסקנה: הסדרה **הנדסית**, מנתה $\frac{1}{9}$ ולכן היא **מתכנסת**. האיבר הראשון של הסדרה

$$\text{הוא } b_1 = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1 \cdot (-3)} = -\frac{1}{3a_1}. \text{ נתון } a_1 > 0 \text{ לכן } b_1 < 0.$$

האיבר הראשון של הסדרה הוא מספר שלילי, מנת הסדרה חיובית וקטנה מ-1, ולכן הסדרה **עולה**.

$$729a_1 = a_{2n+1} \Rightarrow 729a_1 = 81 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\text{לכן המנה של הסדרה } b_1, b_2, b_3, \dots \text{ היא } \frac{1}{9} \text{ לכן המנה של הסדרה } b_1 = -\frac{1}{3a_1} = -\frac{1}{3 \cdot \frac{1}{9}} = -3$$

$$b_1, -b_3, b_5, -b_7, \dots \text{ היא } -\frac{1}{81}. \text{ לכן סכום הסדרה הוא: } \frac{-3}{1 + \frac{1}{81}} = -\frac{243}{82}.$$

פתרון שאלה מס' 3

א. נסמן ב- p את ההסתברות שנבדק שנבחר באקראי מצטיין בלימודים. מקבלים:

$$1 - (1 - p)^5 = 0.67232 \Rightarrow (1 - p)^5 = 0.32768 \Rightarrow 1 - p = 0.8 \Rightarrow p = 0.2$$

נסמן ב- A את קבוצת הנבדקים המצטיינים בלימודים ונסמן ב- B את קבוצת הנבדקים המצטיינים בספורט.

$$\text{נתון: } P(A) = 0.2, P(B/A) = 6 \cdot P(B/\bar{A}). \text{ צריך לחשב: } P(A/B).$$

מקבלים:

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{6 \cdot P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{0.2} = \frac{6 \cdot P(B \cap \bar{A})}{0.8} \Rightarrow P(B \cap A) = 1.5 \cdot P(B \cap \bar{A})$$

	$\bar{A}$	A	
$2.5x$	x	$1.5x$	B
			$\bar{B}$
1	0.8	0.2	

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

$$P(A/B) = \frac{1.5x}{2.5x} = 0.6 \text{ מקבלים:}$$

$$P_4(2) = \frac{216}{625}, p = P(B/A), p = 0.6, k = 2, n = 4 \text{ ב. (1) נתון:}$$

מקבלים:

$$\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 = \frac{27}{128} \Rightarrow 6p^2 (1-p)^2 = \frac{27}{128} \Rightarrow p^2 (1-p)^2 = \frac{9}{256} \Rightarrow$$

$$p(1-p) = \frac{3}{16} \Rightarrow p^2 - p + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow p = \frac{3}{4}, p = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B/A) = \frac{3}{4} \text{ או } P(B/A) = \frac{1}{4}$$

$$\text{עבור } P(B/A) = \frac{3}{4} \text{ מקבלים:}$$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1.5x}{0.2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 0.1 \Rightarrow 2.5x = 0.25 \Rightarrow P(B) = 0.25 > 15\%$$

$$\text{עבור } P(B/A) = \frac{1}{4} \text{ מקבלים:}$$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1.5x}{0.2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{30} \Rightarrow 2.5x = \frac{1}{12} = 0.083 \Rightarrow P(B) = 0.083 < 15\%$$

$$P(B \cap A) = 1.5 \cdot 0.1 = 0.15 \text{ מקבלים } x = 0.1 \text{ עבור: לכן:}$$

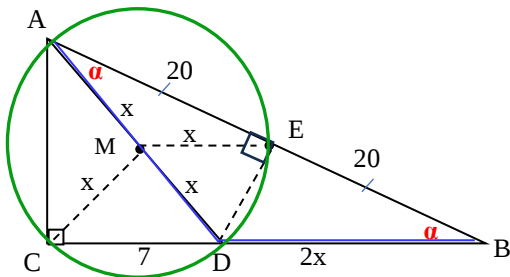
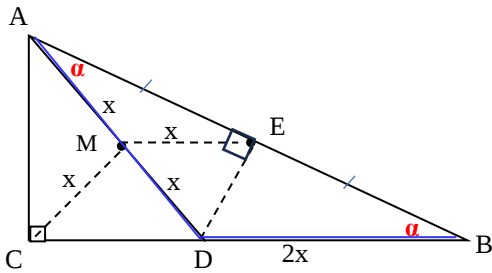
(2)

	$\bar{A}$	A	
0.25	0.1	0.15	B
0.75	0.7	0.05	$\bar{B}$
1	0.8	0.2	

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$$

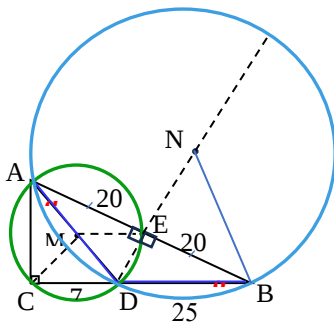
פתרון שאלה מס' 4

	טענה	נימוק
א.	$\angle C = 90^\circ$	נתון
(1)	AD = DB	נתון

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

נתון	$AE = EB$	
התיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם גובה לבסיס	$\Rightarrow DE \perp AB$ $\Rightarrow \angle AED = 90^\circ$	
מרובע בעל שתי זוויות נגדיות שסכומן 180° הוא בר חסימה	$\Rightarrow \angle AED + \angle C = 180^\circ$ לכן, המרובע ACDE בר חסימה	
נתון	$AM = MD$ $AD \Leftarrow$ תיכון ליתר ACD במשולש ACD	(2)
התיכון ליתר במשולש ישר-זווית שווה למחצית היתר	$CM = AM = MD = x \Leftarrow$	
קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש הוא קטע אמצעים במשולש	ME קטע אמצעים במשולש ADB	
קטע האמצעים שווה למחצית הצלע שאינו חוצה	$ME = \frac{1}{2} DB$ $\Rightarrow ME = \frac{1}{2} AD = x$	
כלל המעבר	$ME = CM = x \Leftarrow$	
מיתר במעגל עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר במעגל	AD קוטר המעגל החוסם את המרובע ACDE $R = \frac{1}{2} AD = x$	ב.
נתון	$CD = 7, AB = 40$ $AE = EB = 20 \Leftarrow$	
זווית משותפת	$\angle B = \angle B$	
הוכח	$\angle BED = \angle ACD = 90^\circ$	
משפט דמיון .i.z.	$\triangle BED \sim \triangle BCA \Leftarrow$	
יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים	$\frac{BE}{BC} = \frac{ED}{CA} = \frac{BD}{BA} \Leftarrow$	

חישוב	$\frac{20}{2x+7} = \frac{2x}{40} \Leftarrow$ $2x^2 + 7x = 400 \Leftarrow$ $R = 12.5 \Leftarrow x = 12.5 \Leftarrow$	
הוכח	$DE \perp AB$, $AE = EB$ AB אנך אמצעי לקטע $DE \Leftarrow$	ג.
מרכז המעגל החוסם משולש נמצא על האנך האמצעי של כל אחד ממיתריו	$\Leftarrow$ הנקודה N נמצאת על המשך הקטע DE	(1)
הוכח	$NE \perp AB$ NE הוא מרחק המיתר AB ממרכז המעגל N	(2)
משפט פיתגורס במשולש ישר זווית	במשולש DEB : $DE = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$	
סימון	נסמן את רדיוס המעגל N ב- r $ND = NB = r \Leftarrow$ $NE = r - 15 \Leftarrow$	
משפט פיתגורס	במשולש NEB : $(r - 15)^2 + 20^2 = r^2$ $\Rightarrow -30r + 225 + 400 = 0$ $\Rightarrow r = 20\frac{5}{6} \Rightarrow NE = 5\frac{5}{6}$	



פתרון שאלה מס' 5

א. 1) $\angle ABD = 90^\circ$ (המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה), $\angle ACB = 90^\circ$ (זווית היקפית

הנשענת על קוטר היא זווית ישרה)

$\angle COB = 2\alpha \Leftarrow \angle CAB = \alpha$ (זווית מרכזית גדולה פי 2 מן

הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת)

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin(2\alpha) = \frac{R^2 \sin(2\alpha)}{2} \Leftarrow$$

במשולש DOB:

$$\tan(2\alpha) = \frac{DB}{R} \Rightarrow DB = R \tan(2\alpha)$$

במשולש ABC:

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{2R} \Rightarrow BC = 2R \sin(\alpha)$$

$\angle DBC = \angle CAB = \alpha$ (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית

ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני)

$$\Rightarrow S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot BC \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot R \tan(2\alpha) \cdot 2R \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow$$

$$S_{\triangle DBC} = R^2 \tan(2\alpha) \cdot \sin^2(\alpha) \Rightarrow$$

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{0.5R^2 \sin(2\alpha)}{R^2 \tan(2\alpha) \cdot \sin^2(\alpha)} = \frac{0.5 \cdot \sin(2\alpha)}{\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} \cdot \sin^2(\alpha)} = \frac{0.5 \cdot \sin(2\alpha) \cdot \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha) \cdot \sin^2(\alpha)} \Rightarrow \frac{\cos(2\alpha)}{2\sin^2(\alpha)}$$

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle DBC}} = 1.8 \Rightarrow \frac{\cos 2\alpha}{2\sin^2 \alpha} = 1.8 \Rightarrow \cos 2\alpha = 3.6\sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \alpha = 3.6\sin^2 \alpha \Rightarrow (2$$

$$5.6\sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{5.6}} \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

ב. $EB = EC$ (שני משיקים היוצאים מאותה נקודה למעגל שווים)

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

במשולש EBC :

$$BC = 2R \sin(\alpha) = 2R \sin(25^\circ) \Rightarrow BC = 0.845R$$

$$\angle EBC = \angle ECB = 25^\circ, \angle CEB = 130^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{0.845R}{\sin(130^\circ)} = \frac{EB}{\sin(25^\circ)} \Rightarrow EB = 0.466R$$

ג. במשולש OFB :

$$\angle FOB = 180^\circ - 2\alpha = 130^\circ \Rightarrow \angle OFB = \angle OBF = 25^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{BF}{\sin(130^\circ)} = \frac{R}{\sin(25^\circ)} \Rightarrow BF = 1.8126R$$

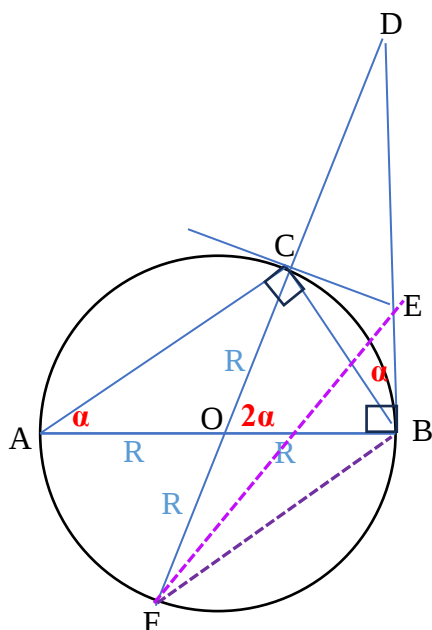
במשולש EBF :

$$\angle EBF = 90^\circ + \alpha = 115^\circ$$

$$\Rightarrow EF^2 = BE^2 + BF^2 - 2 \cdot BE \cdot BF \cdot \cos(115^\circ)$$

$$\Rightarrow EF^2 = (0.466R)^2 + (1.8126R)^2 - 2 \cdot 0.466R \cdot 1.8126R \cdot \cos(115^\circ) = 4.2166R^2$$

$$\Rightarrow EF = 2.0534R = 20.534 \Rightarrow R = 10$$



פתרון שאלה מס' 6

א. (1) תחום ההגדרה של שתי הפונקציה $f(x)$:

$$x(x^2 - 1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$$

הפונקציה מוגדרת בתחומים : $x < -1, -1 < x < 0, 0 < x < 1, x > 1$ (2) הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת עבור $x = 0$, לכן גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- y .חיתוך עם ציר ה- x : פתרונות המשוואה $2x^2 - a = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a}{2}$. אין פתרון למשוואהעבור $a < 0$. וידוע כי $x \neq 0$, לכן, לכל a בתחום $a \leq 0$ אין פתרון למשוואה, כלומר, גרףהפונקציה $f(x)$ אינו חותך את ציר ה- x .אין פתרון גם עבור $x = \pm 1$, לכן, גם עבור $a = 2$ אין נקודות חיתוך עם הצירים.ב. $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ לכן הישרים $x = 1$ ו- $x = -1$ הם האסימפטוטות לגרף הפונקציה המאונכות לציר ה- x . היות ויש רק שתי אסימפטוטות מאונכותלציר ה- x , הרי שהישר $x = 0$ איננו אסימפטוטה. לכן, מתקיים: $a = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 0^2 - a = 0$.

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

$$f(x) = \frac{2x^2}{x(x^2-1)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \quad \text{ג.}$$

(1) האסימפטוטות המאונכות לצירים:

$$x \rightarrow -1 \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow 1 \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty \Rightarrow$$

הישרים $x = 1$, $x = -1$ אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x

הנקודה $(0;0)$ היא "נקודה ריקה" $\Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$

הישר $y = 0$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y $\Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \pm\infty$

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2-1)^2 - 2x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = (2)$$

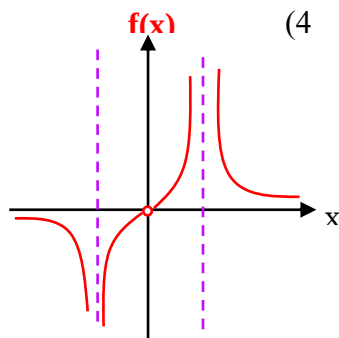
$$= \frac{2(x^2-1)(x^2-1-4x^2)}{(x^2-1)^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2-1)(-3x^2-1)}{(x^2-1)^4}$$

(3) $-3x^2-1 \neq 0$ לכל x , לכן:

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	+	+	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

תחומי העלייה: $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$,

תחומי הירידה: $x < -1$, $x > 1$



$$S = \int_{-2}^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} dx = \int_{-2}^3 2x(x^2-1)^{-2} dx = (5)$$

$$= \left[\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1} \right]_{-2}^3 = \left[\frac{-1}{x^2-1} \right]_{-2}^3 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

ד. (1) $h'(x) = f(x)$ לכן, על פי תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$:

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$h'(x) = f(x)$	-	-	+	+
$h(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

תחומי העלייה: $0 < x < 1$, $x > 1$, תחומי הירידה: $-1 < x < 0$, $x < -1$

(2)

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
-----	----------	--------------	-------------	---------

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

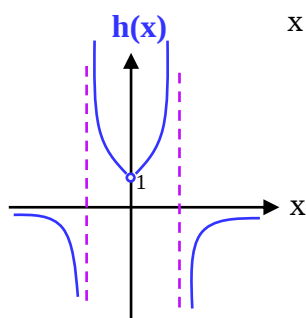
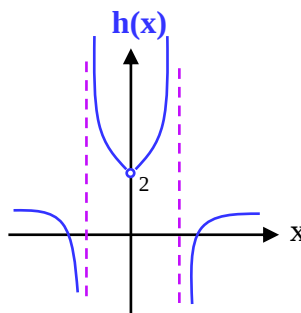
$h'(x) = f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$
$h''(x) = f'(x)$	-		+		+		-
$h(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cup$		$\cap$

תחומי הקעירות כלפי מעלה: $-1 < x < 0, 0 < x < 1$,תחומי הקעירות כלפי מטה: $x < -1, x > 1$

$$h(x) = \int \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx = -\frac{1}{x^2 - 1} + c \quad (3)$$

המאונכת לציר ה- y . עבור $c = 0$ מתקיים $x \rightarrow 0 \Rightarrow h(x) \rightarrow 1$

והגרף הוא מן הצורה:

עבור $c = 0$ אין פתרון למשוואה $h(x) = k$ בתחום $0 \leq k \leq 1$.לכן, אם מתקיים שאין פתרון למשוואה בתחום $1 \leq k \leq 2$ הרי ש- $c = 1$ (הזזה אנכית של יחידה אחת כלפי מעלה)ומקבלים: $h(x) = -\frac{1}{x^2 - 1} + 1$ וגרף הפונקציה הוא:

פתרון שאלה מס' 7

$$א. (1) \text{ תחום ההגדרה: } \cos^2 x - \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \neq \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\text{בתחום } -\pi \leq x \leq \pi \text{ מתקבלות הנקודות: } x \neq -\frac{2\pi}{3}, x \neq -\frac{\pi}{3}, x \neq \frac{\pi}{3}, x \neq \frac{2\pi}{3}$$

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא:

$$-\pi \leq x < -\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < x \leq \pi$$

$$(2) \text{ פתרונות המשוואה } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ בתחום } -\pi \leq x \leq \pi, \text{ כלומר הנקודות בהן } x = \pm \frac{2\pi}{3},$$

מאפסות את המונה, לכן נפשט את משוואת הפונקציה כדי לבדוק האם מתקבלות אסימפטוטות

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

או נקודות ריקות:

$$f(x) = \frac{\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2}{\cos^2 x - \frac{1}{4}} = \frac{\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\cos x + \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x \rightarrow \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow f(x) \rightarrow \frac{0}{1} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{הנקודות } \left(-\frac{2\pi}{3}; 0\right) \text{ ו- } \left(\frac{2\pi}{3}; 0\right) \text{ הן "נקודות ריקות"}$$

$$x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3} : \text{הן ציר ה-} x$$

(3) בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ אין פתרונות למשוואה $\cos x + \frac{1}{2}$, לכן, גרף הפונקציה אינו

חותך את ציר ה- x .

$$f(0) = \frac{\cos 0 + \frac{1}{2}}{\cos 0 - \frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow (0; 3) : \text{נקודת החיתוך עם ציר ה-} y$$

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x) = \frac{\cos x + \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}}$ אינו זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה

$$f(x) = \frac{\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2}{\cos^2 x - \frac{1}{4}}$$

$$-\pi \leq x < -\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < x \leq \pi$$

מתקיים $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = \frac{\cos x + \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) + \sin x \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{\sin x \left(-\cos x + \frac{1}{2} + \cos x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sin x}{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2} = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \Rightarrow$$

הפתרונות בתחום ההגדרה של הפונקציה: $x = -\pi, x = 0, x = \pi$

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0

שאלון 35571

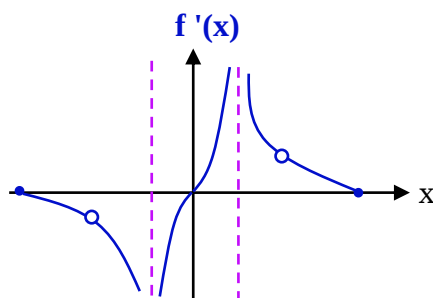
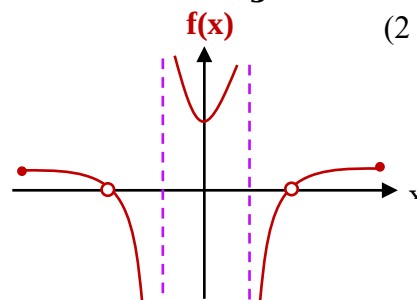
קיץ תשפ"ה 2025

f(x)	Max	↘		↘		↘	min	↗		↗		↗	Max
------	-----	---	--	---	--	---	-----	---	--	---	--	---	-----

$$f(x) = \frac{\cos(\pm\pi) + \frac{1}{2}}{\cos(\pm\pi) - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, f(0) = 3$$

מקבלים: $(-\pi; \frac{1}{3})$ מקסימום, $(0; 3)$ מינימום, $(\pi; \frac{1}{3})$ מקסימום

(2)



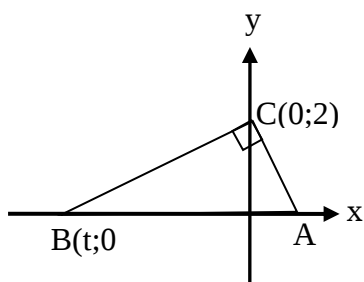
(4) פונקציית הנגזרת $f'(x) = \frac{\sin x}{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2}$ היא פונקציה אי-זוגית:

$$f'(-x) = \frac{\sin(-x)}{\left(\cos(-x) - \frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sin x}{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2} = -f'(x)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = 0 \quad \text{לכן}$$

$$S = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = 2 \cdot [f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \left[f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) \right] = 2 \cdot (5.828 - 3) = 5.656 \quad (5)$$

פתרון שאלה מס' 8



א. מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC נמצא באמצע

היתר AB. לכן, אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש

הוא $\frac{1}{2} AB$. אם נסמן את רדיוס המעגל ב- R , הרי

שפונקציית המטרה המתארת את שטח המעגל היא

$$y = \pi R^2 \quad \text{נבטא את הפונקציה כפונקציה של } t :$$

לכן, צריך לבטא באמצעות t את שיעור ה- x של הנקודה A.

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

$$m_{BC} = \frac{2-0}{0-t} = -\frac{2}{t} : \text{שיפוע הישר BC}$$

$$\Rightarrow m_{AC} = \frac{t}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{t}{2}x + 2 : \text{משוואת הישר AC}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{t}{2}x_A + 2 \Rightarrow 0 = t \cdot x_A + 4 \Rightarrow x_A = -\frac{4}{t} \Rightarrow A(-\frac{4}{t}; 0)$$

$$\Rightarrow AB = -\frac{4}{t} - t = 2R \Rightarrow R = -\frac{2}{t} - \frac{t}{2} \Rightarrow R^2 = \left(-\frac{2}{t} - \frac{t}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$R^2 = \left(-\frac{2}{t} - \frac{t}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{t^2} + 2 + \frac{t^2}{4} \Rightarrow y(t) = \pi \left(\frac{4}{t^2} + 2 + \frac{t^2}{4} \right)$$

תחום ההגדרה של הפונקציה : $t < 0$.

נמצא את נקודת המינימום של הפונקציה:

$$y(t) = \pi \left(\frac{4}{t^2} + 2 + \frac{t^2}{4} \right) \Rightarrow y'(t) = \pi \left(-\frac{8t}{t^4} + \frac{t}{2} \right) = \pi \left(\frac{-16t + t^5}{2t^4} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(-16 + t^4) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 2, t = -2$$

הפתרון בתחום $t < 0$ הוא $t = -2$.

t	t <	-2	< t <	0
f'(t)	-	0	+	
f(t)	↘	מינימום	↗	

$$b. R = -\frac{2}{t} - \frac{t}{2} = 2 \text{ רדיוס המעגל ששטחו מינימלי הוא}$$

$$\text{לכן, היקף המעגל ששטחו מינימלי הוא } 2\pi R = 4\pi$$

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

מבחן מס' 2פתרון שאלה מס' 1

א.

נוכיח את נכונות השוויון עבור $n = 2$, המספר הטבעי הזוגי הראשון: $\frac{2(2 \cdot 2 - 3)}{2} = 1$

השוויון נכון עבור $n = 2$

נניח כי עבור מספר טבעי זוגי כלשהו k מתקיים:

$$1 + 9 + 17 + \dots + (4k - 7) = \frac{k(2k - 3)}{2}$$

ונוכיח על סמך ההנחה כי עבור $k + 2$, המספר הזוגי העוקב, מתקיים:

$$1 + 9 + 17 + \dots + (4k - 7) + (4k + 1) = \frac{(k + 2)(2k + 1)}{2}$$

$$\frac{k(2k - 3)}{2} + (4k + 1) = \frac{(k + 2)(2k + 1)}{2} \quad \text{נותר להוכיח את השוויון:}$$

$$k(2k - 3) + 2(4k + 1) = (k + 2)(2k + 1) \quad \text{צריך להוכיח:}$$

$$2k^2 - 3k + 8k + 2 = 2k^2 + k + 4k + 2 \quad \text{צריך להוכיח:}$$

$$2k^2 + 5k + 2 = 2k^2 + 5k + 2 \quad \text{מקבלים:}$$

השוויון נכון עבור $k + 2$.

מסקנה: אם השוויון נכון עבור $n = 2$ ומן ההנחה שהוא נכון עבור מספר טבעי זוגי כלשהו נובע שהוא נכון גם עבור המספר הזוגי העוקב לו, הרי שהוא נכון לכל n טבעי זוגי.

ב.

1) נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן $(3;6)$ נקודת מקסימום ו- $(-3;-6)$ נקודת מינימום.

גרף הפונקציה $g(x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ ביחס לציר ה- x , לכן:

הנקודה $(3;-6)$ היא נקודת מינימום והנקודה $(-3;6)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה $g(x)$.

2) הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית המוגדרת לכל ערך של x ולכן עוברת דרך ראשית הצירים שהיא נקודת

החיתוך היחידה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x . על פי הנתון, הפונקציה חיובית בתחום $x > 0$ ושלילית בתחום $x < 0$.

לכן, הפונקציה $h(x) = \sqrt{f(x)}$ מוגדרת בתחום $x \geq 0$, מתקיים $h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ ולכן נקודות

הקיצון של הפונקציה $h(x)$ הן: $(0;0)$ מינימום, $(3;\sqrt{6})$ מקסימום.

3) בתחום $x \geq 0$ גרף הפונקציה $k(x)$ מתלכד עם גרף הפונקציה $f(x)$ ובתחום $x < 0$ גרף

הפונקציה $k(x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ ביחס לציר ה- x .

מקבלים: $(3;6)$ מקסימום, $(0;0)$ מינימום, $(-3;6)$ מקסימום.

4) גרף הפונקציה $f(x+3)$ הנו הזזה של גרף הפונקציה $f(x)$ ב-3 יחידות שמאלה, כך שנקודות הקיצון

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

שלה הן $(0;6)$ מקסימום, $(-6;-6)$ מינימום והנקודה $(-3;0)$ היא נקודת חיתוך עם ציר ה- x .
בתחום $x \geq -3$ גרף הפונקציה $j(x)$ הוא מתיחה אנכית פי 2 של גרף הפונקציה $f(x)$ לכן,
הנקודה $(0;12)$ היא נקודת מקסימום. בתחום $x < -3$ גרף הפונקציה נמתח ומשתקף ביחס לציר
ה- x כך שמקבלים: $(-3;0)$ נקודת מינימום, $(-6;12)$ נקודת מקסימום.

ג.

חישוב האיבר הראשון של הסדרה: $\cos^2(x) + \cos^2(0.5\pi - x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
האיבר הכללי של הסדרה:
 $\cos^2(x + 2\pi k) + \cos^2(0.5\pi - x + 2\pi k) = \cos^2(x) + \cos^2(0.5\pi - x) =$
 $= \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
מתקבלת סדרה קבועה שכל איבריה 1, לכן, סכום 40 האיברים הראשונים הוא 40.

ד.

(1) הסדרה ההנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ מתכנסת ועולה, לכן מתקיים: $0 < q_1 < 1$ וגם $a_1 < 0$.

(לדוגמא: $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$)

אם מכניסים איבר נוסף בין כל שני איברים סמוכים של הסדרה כך שתתקבל סדרה הנדסית חדשה

$b_1, b_2, b_3, \dots$ מהצורה $a_1, x, a_2, \dots$ שמנתה q_2 , המקיימת $\frac{x}{a_1} = q_2$, $b_1 = a_1$.

a_1, x, a_2 מקיימים:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{a_2}{x} \Rightarrow x^2 = a_1 \cdot a_2 \Rightarrow (x)^2 = a_1 \cdot a_1 \cdot q_1 \Rightarrow (x)^2 = (a_1)^2 \cdot q_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1 = \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 \Rightarrow q_1 = (q_2)^2 \Rightarrow q_2 = \pm\sqrt{q_1}$$

ידוע כי $0 < q_1 < 1$ לכן $-1 < \pm\sqrt{q_1} < 1$, כלומר, הסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$

מתכנסת. לכן טענה (1) נכונה

(2) לא ניתן לקבוע – עבור $0 < q_1 < 1$ מתקיים $q_2 = \pm\sqrt{q_1}$, לכן $\sqrt{q_1} > q_1$

(לדוגמא $\left(\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}\right)$ אבל $-\sqrt{q_1} < q_1$ $\left(-\sqrt{\frac{1}{4}} < \frac{1}{4}\right)$)

(3) לא נכון – עבור $0 < q_1 < 1$ מתקיים $-1 < \pm\sqrt{q_1} < 1 \Leftrightarrow -1 < q_2 < 1$.

אבל עבור $q_2 = -\sqrt{q_1}$ הסדרה לא עולה ולא יורדת, לכן הטענה לא נכונה.

(4) לא ניתן לקבוע – $S_1 = \frac{a_1}{1-q_1}$ ($a_1 < 0, 0 < q_1 < 1$) $S_2 = \frac{a_1}{1-q_2} = \frac{a_1}{1 \pm \sqrt{q_1}}$

$$S_2 > S_1 \Rightarrow \frac{a_1}{1 \pm \sqrt{q_1}} > \frac{a_1}{1-q_1} \Rightarrow \frac{a_1}{1 \pm \sqrt{q_1}} > \frac{a_1}{(1+\sqrt{q_1})(1-\sqrt{q_1})}$$

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

עבור $q_2 = \sqrt{q_1}$ מתקבל אי השוויון: $1 - q_1 > 0$, $1 \pm \sqrt{q_1} > 0$

נכון $a_1(1 - \sqrt{q_1}) > a_1$, $a_1 < 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{q_1} < 1 \Rightarrow \sqrt{q_1} > 0$

עבור $q_2 = -\sqrt{q_1}$ מתקבל אי השוויון:

לא נכון $a_1(1 + \sqrt{q_1}) > a_1 \Rightarrow 1 + \sqrt{q_1} < 1 \Rightarrow \sqrt{q_1} < 0$

(לדוגמא : עבור $q_2 = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{4}$, $a_1 = -1$ מקבלים: $S_1 = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$

עבור $q_2 = \frac{1}{2}$ מקבלים $S_2 = \frac{-1}{1 - \frac{1}{2}} = -2 < -\frac{4}{3}$

עבור $q_2 = -\frac{1}{2}$ מקבלים $S_2 = \frac{-1}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} > -\frac{4}{3}$

(5) נכון- אם הסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ עולה, אז $S_2 = \frac{a_1}{1 - \sqrt{q_1}} < \frac{a_1}{1 - q_1}$ (הוכח)

פתרון שאלה מס' 2

הסדרה	האיבר הראשון	המנה	מס' האיברים	הסכום
הסדרה המקורית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$	a_1	q	$2n$	$\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}$
הסדרה המתקבלת כאשר מחליפים את סימני האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots, a_{2n-1}, -a_{2n}$	a_1	$-q$	$2n$	$\frac{a_1((-q)^{2n}-1)}{-q-1}$

א. (1) לפי הנתונים: $5 \cdot \frac{a_1((-q)^{2n}-1)}{-q-1} = \frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}$

$q = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6q = 4 \Leftrightarrow 5q - 5 = -q - 1 \Leftrightarrow \frac{5}{-q-1} = \frac{1}{q-1}$, לכן מקבלים: $(-q)^{2n} = q^{2n}$

(2) נתון: $a_1 q^{2n-1} = 128$, $\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1} = 6305$

מכאן: $a_1 q^{2n} = 128q \Leftrightarrow \frac{a_1 q^{2n}}{q} = 128$

$\Leftrightarrow \frac{128q - a_1}{q-1} = 6305 \Leftrightarrow \frac{a_1 q^{2n} - a_1}{q-1} = 6305 \Leftrightarrow \frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1} = 6305$

$a_1 = 2187 \Leftrightarrow 128 \cdot \frac{2}{3} - a_1 = 6305(\frac{2}{3} - 1) \Leftrightarrow 128q - a_1 = 6305(q-1)$

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

$$2n = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \frac{256}{6561} \Leftrightarrow 2187 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = 128 \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow a_1 q^{2n} = 128q$$

ב. הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה הנדסית בת 8 איברים, האיבר הראשון שלה הוא $a_1 = 2187$

ומנתה $q = \frac{2}{3}$. האיבר הכללי של הסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ מקיים:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \Rightarrow b_n = a_n + a_n \cdot q + a_n \cdot q^2 = a_n(1 + q + q^2) = \\ &= a_n \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) = \frac{19}{9} a_n \Rightarrow b_n = \frac{19}{9} a_n \Rightarrow b_{n+1} = \frac{19}{9} a_{n+1} \\ &\Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{19a_{n+1}}{9} \cdot \frac{9}{19a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{2}{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

הסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ היא סדרה הנדסית ומנתה $\frac{2}{3}$.

האיבר הראשון של הסדרה הוא $b_1 = \frac{19}{9} a_1 = \frac{19}{9} \cdot 2187 = 4617$

בסדרה: $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $b_2 = a_2 + a_3 + a_4$, $\dots$, $b_6 = a_6 + a_7 + a_8$ ישנם 6 איברים

$$S_6 = \frac{4617 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^6 - 1 \right]}{\frac{2}{3} - 1} = 12635 \quad \text{לכן סכומה הוא : } 12635$$

ג. הסדרה האינסופית שהתקבלה היא הסדרה: $b_1, -3b_2, b_3, -3b_4, b_5, -3b_6, \dots$.

סכום הסדרה מורכב מסכום הסדרות האינסופיות

$$b_1 + b_3 + b_5 + \dots + (-3b_2) + (-3b_4) + (-3b_6) + \dots$$

$$\text{נסמן: } S_1 = b_1 + b_3 + b_5 + \dots, \quad S_2 = (-3b_2) + (-3b_4) + (-3b_6) + \dots$$

הסדרה $b_1 + b_3 + b_5 + \dots$ היא סדרה הנדסית מתכנסת שאיבריה הראשון הוא $b_1 = 4617$

$$\text{ומנתה } q^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \text{ . לכן: } S_1 = \frac{4617}{1 - \frac{4}{9}} = 8310.6$$

נסמן את האיבר הכללי של הסדרה $-3b_2, -3b_4, -3b_6, \dots$ ב- $c_n = -3b_{2n}$

$$\text{ונקבל: } c_{n+1} = -3b_{2n+2} \Rightarrow \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{-3b_{2n+2}}{-3b_{2n}} = \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = \frac{b_{2n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}{b_{2n}} = \frac{4}{9}$$

לכן הסדרה מתכנסת, מנתה $\frac{4}{9}$ ואיבריה הראשון הוא $-3b_2 = -3 \cdot b_1 q = -3 \cdot 4617 \cdot \frac{2}{3} = -9234$,

$$\text{מקבלים: } S_2 = \frac{-9234}{1 - \frac{4}{9}} = -16621.2 \Rightarrow S_1 + S_2 = 8310.6 - 16621.2 = -8310.6$$

פתרון שאלה מס' 3

א. נתון: $p(1) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \Leftarrow$, $p(2) = \frac{1}{2}$, $p(10) = \frac{1}{10}$, $p(5) = \frac{1}{5}$

ההסתברות לקבל מספר גדול מ-4, כלומר "5" או "10" היא $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0.3$

וההסתברות לקבל מספר קטן מ-4 היא 0.7. לכן, ההסתברות שב-6 הטלות נקבל שלפחות פעם אחת מספר גדול מ-4 ולפחות פעם אחת מספר קטן מ-4 היא:

$$1 - (0.3^6 + 0.7^6) = \mathbf{0.8816}$$

ב. ההסתברות לקבל מספר זוגי בסיבוב בודד היא $P(2) + P(10) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0.6$. לכן:

$$P_6(3) = \binom{6}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^3 = \mathbf{0.27648}$$

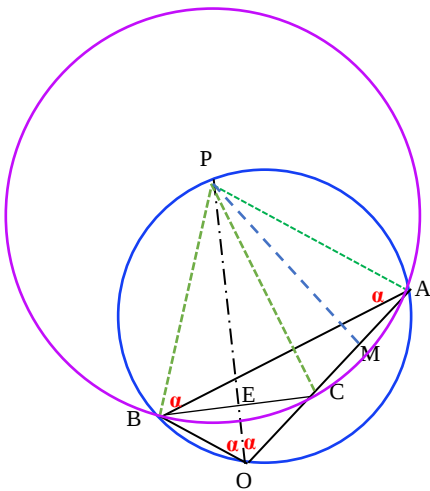
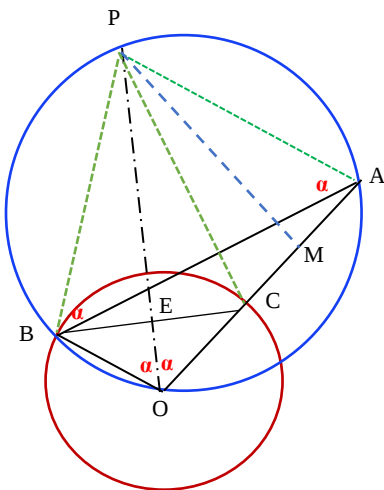
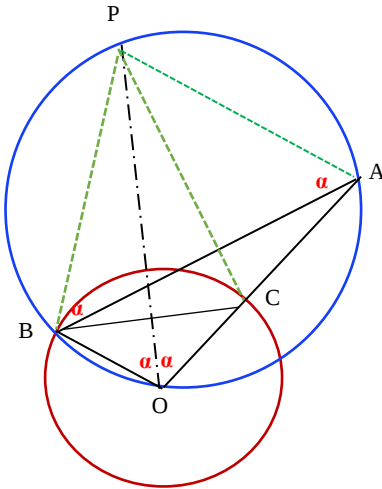
ג. התנאים: המחוג נעצר על מספר זוגי בדיוק 3 פעמים.

ההסתברות שבסיבוב הראשון המחוג נעצר על המספר "2" היא 0.5 וההסתברות שבסיבוב השני המחוג נעצר על "10" היא 0.1. המחוג כבר נעצר פעמיים על מספר זוגי, כלומר, בדיוק באחת מ-4 הסיבובים האחרונים המחוג נעצר על מספר זוגי. מקבלים:

$$P = \frac{0.5 \cdot 0.1 \cdot \binom{4}{1} \cdot 0.6 \cdot 0.4^3}{0.27648} = \frac{0.00768}{0.27648} = \mathbf{\frac{1}{36}}$$

ד. אם המספר "5" התקבל 4 פעמים, סכום המספרים הוא 20. לכן, אם סכום המספרים בשש הסיבובים אינו עולה על 22, הרי שבשתי הפעמים הנוספות התקבל המספר "1".

$$P(5) = P(1) = 0.2 \Rightarrow P = \binom{6}{2} \cdot 0.2^4 \cdot 0.2^2 = \mathbf{\frac{3}{3125}}$$

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025פתרון שאלה מס' 4

נימוק	טענה	
נתון חוצה זווית	$\angle BOP = \angle COP = \alpha$	א.
זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת במעגל החוסם את המשולש ABO	$\angle BOP = \angle BAP = \alpha$ $\angle AOP = \angle ABP = \alpha$	(1)
מול זוויות שוות במשולש APB ישנן צלעות שוות	$\Rightarrow PB = PA$	
רדיוסים שווים במעגל O	$OB = OC$	(2)
נתון	$\angle BOP = \angle COP$	
צלע משותפת	$OP = OP$	
משפט חפיפה ז.ז.צ.	$\Rightarrow \triangle BOP \cong \triangle COP$	
צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים	$\Rightarrow PB = PC$	
נתון	$CM = AM$	ב.
כלל המעבר	$PC = PA$	(1)
התיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם גובה לבסיס	$\Rightarrow PM \perp AC$	
סימון	נסמן ב-E את נקודת החיתוך של PO ו-BC	(2)
חוצה זווית הראש במשולש שווה-שוקיים BOC הוא גם תיכון וגם גובה לבסיס	$\Rightarrow PO \perp BC, BE = EC$	
נקודת המפגש של שני אנכים אמצעיים לצלעות המשולש היא מרכז המעגל החוסם את המשולש	$\Leftarrow PE$ אנך אמצעי לצלע BC, $\Leftarrow PM$ אנך אמצעי לצלע AC $\Leftarrow$ הנקודה P היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC	
הוכח	במעגל החוסם את המשולש ABC: P מרכז המעגל	(3)
זווית מרכזית גדולה פי 2 מן הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת	$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle APC$	
התיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים APC חוצה את זווית הראש	$\angle APM = \frac{1}{2} \angle APC$	
כלל המעבר	$\angle ABC = \angle APM$	

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

פתרון שאלה מס' 5

א. (1) $\angle ADB = \angle ABD = 90^\circ - \alpha \Leftarrow \angle A = 2\alpha$, $AB = AD = m \Leftarrow$ ABCD מעוין

BF חוצה זווית ABD

$$\angle AFB = 180^\circ - (2\alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 135^\circ - 1.5\alpha \Leftarrow \angle ABF = \angle DBF = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \Leftarrow$$

(2) במשולש ADB:

$$\frac{DB}{\sin(2\alpha)} = \frac{m}{\sin(90^\circ - \alpha)} \Rightarrow DB = \frac{m \cdot \sin(2\alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{m \cdot \sin(2\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{2m \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow DB = 2m \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{AE}{m} \Rightarrow AE = m \cdot \cos 2\alpha \quad \text{במשולש ADE}$$

$$\frac{AF}{\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{m}{\sin(135^\circ - 1.5\alpha)} \Rightarrow AF = \frac{m \cdot \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(135^\circ - 1.5\alpha)} \quad \text{במשולש ABF}$$

$$\frac{AE}{DB} = 1.673 \Rightarrow \frac{m \cdot \cos(2\alpha)}{2m \cdot \sin(\alpha)} = 1.673 \Rightarrow \cos(2\alpha) = 3.346 \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \quad \text{ב.}$$

$$\sin(\alpha) = t \quad \text{נסמן: } 1 - 2\sin^2(\alpha) = 3.346 \cdot \sin(\alpha)$$

$$0 < \sin \alpha < 1 \quad \text{לכן } t = 0.2588, t = -1.93 \Leftarrow 2t^2 + 3.346t - 1 = 0$$

$$\alpha = 15^\circ \Leftarrow \sin \alpha = 0.2588$$

$$AF = \frac{m \cdot \sin(37.5^\circ)}{\sin(112.5^\circ)} = 0.6589m \quad \text{ג. (1) מקבלים:}$$

$$\angle A = 30^\circ, \quad AE = m \cdot \cos 30^\circ = 0.866m$$

במשולש AEF:

$$EF^2 = (0.6589m)^2 + (0.866m)^2 - 2 \cdot 0.6589m \cdot 0.866m \cdot \cos 30^\circ$$

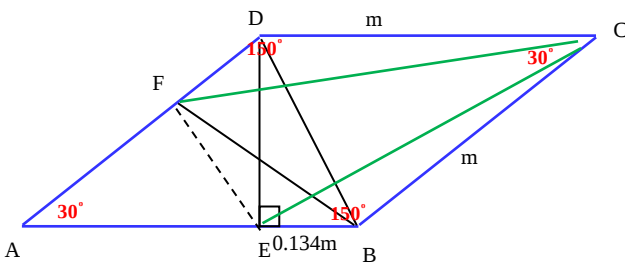
$$\Rightarrow EF^2 = 0.19578m^2 \Rightarrow EF = 0.4425m$$

$$\text{במשולש FDC: } AF = 0.6589m \Rightarrow FD = 0.3411m$$

$$FC^2 = (0.3411m)^2 + m^2 - 2 \cdot 0.3411m \cdot m \cdot \cos 150^\circ = 1.707m^2 \Rightarrow FC = 1.3066m$$

$$\text{במשולש EBC: } AE = 0.866m \Rightarrow BE = 0.134m$$

$$EC^2 = (0.134m)^2 + m^2 - 2 \cdot 0.134m \cdot m \cdot \cos 150^\circ = 1.25m^2 \Rightarrow EC = 1.118m$$



שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

$$(2) \text{ במשולש EFC : } EC^2 = EF^2 + FC^2 - 2 \cdot EF \cdot FC \cdot \cos \angle EFC$$

$$\Rightarrow \cos \angle EFC = \frac{EF^2 + FC^2 - EC^2}{2 \cdot EF \cdot FC} =$$

$$= \frac{(0.4425\text{m})^2 + (1.3066\text{m})^2 - (1.118\text{m})^2}{2 \cdot 0.4425\text{m} \cdot 1.3066\text{m}} = 0.5648 \Rightarrow \angle EFC = 55.61^\circ$$

פתרון שאלה מס' 6

א. הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{36-x^2}$: תחום ההגדרה: $-6 \leq x \leq 6$, נקודות החיתוך עם ציר ה- x :

$(6;0)$, $(0;0)$, $(-6;0)$, תחום החיוביות : $0 < x < 6$, תחום השליליות: $-6 < x < 0$.

הגרף המתאים : **גרף (5)**

הפונקציה: $g(x) = \sqrt{36-x^2}$: תחום ההגדרה: $-6 \leq x \leq 6$, נקודות החיתוך עם ציר ה- x :

$(6;0)$, $(-6;0)$, תחום החיוביות : $-6 < x < 6$, תחום השליליות: אף x .

הגרף המתאים : **גרף (2)**

הפונקציה: $h(x) = \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}$: תחום ההגדרה: $-6 < x < 6$, נקודת החיתוך עם ציר ה- x :

$(0;0)$, תחום החיוביות : $0 < x < 6$, תחום השליליות: $-6 < x < 0$.

הגרף המתאים : **גרף (1)**

הפונקציה: $k(x) = \sqrt{x^2(36-x^2)}$: תחום ההגדרה: $-6 \leq x \leq 6$, נקודת החיתוך עם ציר ה- x :

$(6;0)$, $(0;0)$, $(-6;0)$, תחום החיוביות : $0 < x < 6$ או $-6 < x < 0$, תחום השליליות: אף x .

הגרף המתאים : **גרף (4)**

הפונקציה: $j(x) = \frac{\sqrt{36-x^2}}{x}$: תחום ההגדרה: $-6 \leq x < 0 \cup 0 < x \leq 6$, נקודת החיתוך עם

ציר ה- x : $(6;0)$, $(-6;0)$, תחום החיוביות : $0 < x < 6$, תחום השליליות: $-6 < x < 0$.

הגרף המתאים : **גרף (3)**

$$k(x) = \sqrt{x^2(36-x^2)} = \pm x\sqrt{36-x^2} = |x|\sqrt{36-x^2} = |x\sqrt{36-x^2}| = |f(x)| \quad \text{ב. (1)}$$

נכון

(2) נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x) = \sqrt{36-x^2}$:

$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{36-x^2}} = 0 \Rightarrow x \Rightarrow (0;6) \text{ נקודת המקסימום}$$

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025והנקודות $(-6;0)$ ו- $(6;0)$ הן נקודות המינימום של הפונקציה בקצה תחום ההגדרה.

$$\text{תחום ההגדרה של הפונקציה } g(2x) = \sqrt{36 - (2x)^2} = \sqrt{36 - 4x^2} \text{ : } -3 \leq x \leq 3.$$

$$\text{נקודת המקסימום של הפונקציה } g(2x) = \frac{-4x}{\sqrt{36 - 4x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0;6).$$

הנקודות $(-3;0)$ ו- $(3;0)$ הן נקודות המינימום של הפונקציה בקצה תחום ההגדרה.

לכן, הטענה לא נכונה

$$(3) \text{ תחום ההגדרה של הפונקציה } p(x) = \frac{1}{h(x)} \text{ : תחום ההגדרה של } h(x) \text{ הוא } -6 < x < 6$$

וגם $h(x) \neq 0$. מתקבל התחום: $-6 < x < 0, 0 < x < 6$.תחום ההגדרה של הפונקציה $j(x)$: $-6 \leq x < 0 \cup 0 < x \leq 6$.

תחומי ההגדרה אינם זהים, לכן, הטענה איננה נכונה.

$$f(x) = x\sqrt{36 - x^2} \Rightarrow f(-x) = -x\sqrt{36 - (-x)^2} = -x\sqrt{36 - x^2} = -f(x) \quad (1)$$

הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

$$f(x) = x\sqrt{36 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{36 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{36 - x^2}} = (2)$$

$$= \frac{36 - x^2 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{36 - 2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$$

x	$x < -6$	-6	$-6 < x < -3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2} < x < 3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2} < x < 6$	6	$x > 6$
$f'(x)$			-	0	+	0	-		
$f(x)$		Max	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	

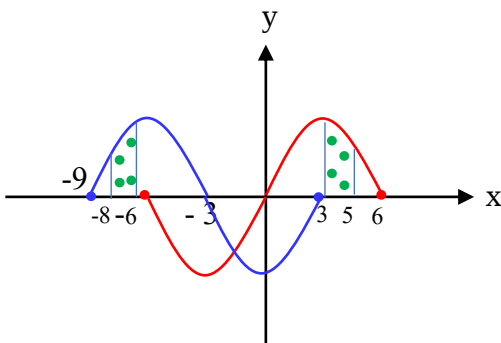
נקודות הקיצון:

 $(-6;0)$ מקסימום, $(-3\sqrt{2};-18)$ מינימום, $(3\sqrt{2};18)$ מקסימום, $(6;0)$ מינימום(3) גרף הפונקציה $r(x) = -f(x + 3)$ הנו הזזהאופקית של גרף הפונקציה $f(x)$ שלוש יחידותשמאלה ושיקוף הגרף ביחס לציר ה- x :

$$\text{הפונקציה } f(x) \text{ אי-זוגית ולכן, } -\int_{-5}^{-3} f(x)dx = \int_3^5 f(x)dx.$$

 $\Leftrightarrow$ הפונקציה $r(x)$ היא גם הזזה וגם שיקוף של $f(x)$

$$\int_3^5 f(x)dx = \int_{-8}^{-6} r(x)dx \quad \text{לכן } m = -6$$



פתרון שאלה מס' 7

$$\text{א. (1) תחום ההגדרה: } \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\text{בתחום } -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \text{ מקבלים } x \neq -\frac{3\pi}{4}, x \neq -\frac{\pi}{4}, x \neq \frac{\pi}{4}, x \neq \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{מתקבל התחום: } -\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{האסימפטוטות המאונכות לציר ה-} x: x = -\frac{3\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{(2) נקודות החיתוך עם ציר ה-} x: f(x) = \frac{-2\sin^2 x - \cos x + 1}{\cos 2x} = 0 \Rightarrow -2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -2(1 - \cos^2 x) - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1, \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\pi k, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\text{הפתרונות בתחום } -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}: x = -\frac{2\pi}{3}, x = 0, x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{מתקבלות הנקודות } \left(-\frac{2\pi}{3}; 0\right), (0; 0), \left(\frac{2\pi}{3}; 0\right)$$

$$\text{(3) } f(x) = \frac{-2\sin^2 x - \cos x + 1}{\cos 2x} = \frac{1 - 2\sin^2 x - \cos x}{\cos 2x} = \frac{\cos 2x - \cos x}{\cos 2x} \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

$$\text{(4) } f(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos 2x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{-\sin x \cdot \cos 2x - (-2 \sin 2x \cdot \cos x)}{(\cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos 2x - 2 \sin 2x \cdot \cos x}{(\cos 2x)^2} = \frac{\sin x \cdot \cos 2x - 4 \sin x \cdot \cos^2 x}{(\cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x (\cos 2x - 4 \cos^2 x)}{(\cos 2x)^2} = \frac{\sin x (2 \cos^2 x - 1 - 4 \cos^2 x)}{(\cos 2x)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{\sin x (-2 \cos^2 x - 1)}{(\cos 2x)^2} = 0 \Rightarrow \sin x (-2 \cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow$$

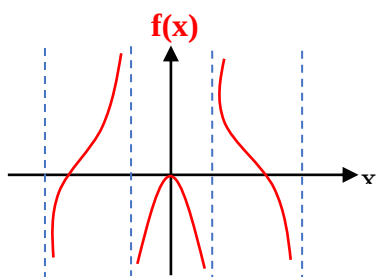
$$-2 \cos^2 x - 1 \neq 0, \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

$$\text{הפתרון היחיד בתחום } -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ הוא } x = 0 \text{ . לכן:}$$



שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

x	-0.75π	$< x <$	-0.25π	$< x <$	0	$< x <$	0.25π	$< x <$	0.75π
$f'(x)$		+		+	0	-		-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	Max	$\searrow$		$\searrow$	

הנקודה $(0;0)$ נקודת מקסימום

(5)

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$:תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ וגם $f(x) \neq 0$, כלומר, $x \neq 0$.

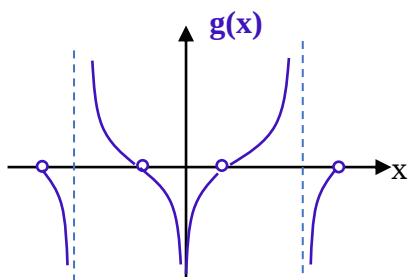
מקבלים:

$$-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} < x < 0, 0 < x < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

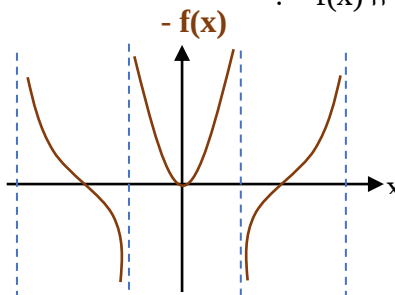
נקודות ריקות:

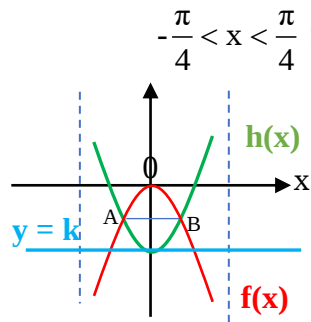
$$x \rightarrow \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm \infty \Rightarrow g(x) \rightarrow 0 \Rightarrow \left(\pm \frac{3\pi}{4}; 0\right), \left(\pm \frac{\pi}{4}; 0\right)$$

$$x \rightarrow 0, \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow g(x) \rightarrow \pm \infty \Rightarrow x = 0, x = -\frac{2\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$$

לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון, היא יורדת בתחומים $-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4} < x < 0$ ועולה בתחומים $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.תחומי החיוביות והשליליות מתאימים לאלו של $g(x)$.

מתקבל הגרף:

ג. 1) גרף הפונקציה $-f(x)$:גרף הפונקציה $h(x) = -f(x) + k$ הוא הזזה אנכית של גרף הפונקציה $-f(x)$.

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

אם גרף הפונקציה $h(x)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$
הרי שצריך להתקיים $k < 0$ ואז מקבלים:
הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ זוגיות לכן הישר
AB מקביל לציר ה- x .

$$\text{נתון: } y_A = 1 - \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x_A = -\frac{\pi}{6}$$

בנקודות A ו-B מתקיים

$$h(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = -f(x) + k \Rightarrow 2f(x) = k \Rightarrow 2f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = k \Rightarrow k = 2 - 2\sqrt{3}$$

(2) הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בתחום זה, לכן $m > s$

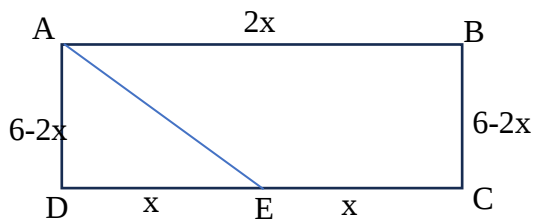
פתרון שאלה מס' 8

א. נתון: $AD = 6 - 2x \Leftrightarrow AB = 2x$, $AB + AD = 6 \Leftrightarrow 2AB + 2AD = 12$

$$0 < x < 3, S_{ABCD}(x) = 12x - 4x^2 \Leftrightarrow S_{ABCD}(x) = 2x(6 - 2x) \Leftrightarrow$$

$$S'_{ABCD}(x) = 12 - 8x = 0 \Rightarrow x = 1.5, S''_{ABCD}(x) = -8 \Rightarrow$$

עבור $x = 1.5$ שטח המלבן ABCD מקסימלי. השטח המקסימלי הוא $3 \cdot 3 = 9$



ב. E אמצע DC לכן $DE = EC = x$

במשולש ADE מקבלים:

$$AE = \sqrt{x^2 + (6 - 2x)^2} = \sqrt{5x^2 - 24x + 36} \Rightarrow$$

$$0 < x < 3, P_{ABCE}(x) = \sqrt{5x^2 - 24x + 36} + 3x + 6 - 2x \Rightarrow$$

$$P_{ABCE}(x) = \sqrt{5x^2 - 24x + 36} + 6 + x \Rightarrow P'_{ABCE}(x) = \frac{10x - 24}{2\sqrt{5x^2 - 24x + 36}} + 1 \Rightarrow$$

$$P'_{ABCE}(x) = \frac{5x - 12}{\sqrt{5x^2 - 24x + 36}} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{5x - 12}{\sqrt{5x^2 - 24x + 36}} = -1 \Rightarrow$$

$$5x^2 - 24x + 36 = (12 - 5x)^2 \Rightarrow 5x^2 - 24x + 36 = 144 - 120x + 25x^2 \Rightarrow$$

שאלון 35571
קיץ תשפ"ה 2025

$$20x^2 - 96x + 108 = 0 \Rightarrow x = 3, x = 1.8$$

$$\Rightarrow 0 < x < 3 \Rightarrow x = 1.8$$

x	0	$x < 1.8$	$x > 1.8$	3
$P'(x)$		-	0	+
$P(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

עבור $x = 1.8$ היקף המרובע APCE מינימלי. ההיקף המינימלי הוא

$$P_{\min} = \sqrt{5 \cdot 1.8^2 - 24 \cdot 1.8 + 36} + 6 + 1.8 = 10.8$$

ג. (1) הפונקציה $S_{ABCD}(x) = 12x - 4x^2$ המתארת את

שטח המלבן ABCD בתחום $0 < x < 3$ היא מהצורה:

הערך המקסימלי של שטח המלבן הוא 9, לכן עבור

כל ערך של t בתחום $1.5 < t < 1.8$, $S(t) < 9$.

(2) הפונקציה $P_{ABCE}(x) = \sqrt{5x^2 - 24x + 36} + 6 + x$ המתארת

את היקף המרובע ABCE בתחום $0 < x < 3$ היא מהצורה:

לכן, עבור $1.5 < t < 1.8$, $P(t) > 10.8$

