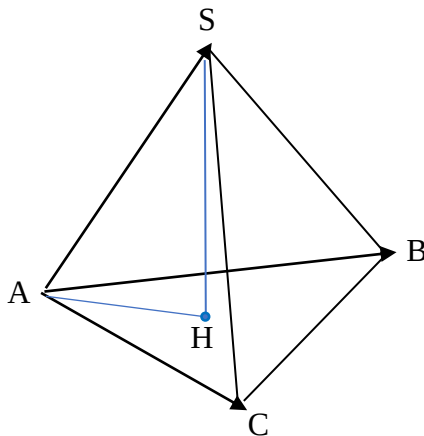


מבחן מס' 1

פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים

1. א. הראו, כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהיחס בין מרחקן מהנקודה $(-6;0)$ לבין מרחקן מהישר $x = -13.5$ הוא $\frac{2}{3}$, הנו אליפסה ומצאו את משוואתה.
 ב. (1) הנקודה A נמצאת על האליפסה שמצאתם בסעיף א' ברביע הראשון. נסמן ב- F_1 את המוקד הימני של האליפסה, F_2 המוקד השמאלי של האליפסה. מרחק הנקודה A מן הישר $x = -13.5$ הוא $3m$. בטאו באמצעות m את מרחק הנקודה A מן המוקד הימני של האליפסה.
 (2) הישר $x = -13.5$ הנו מדריך של פרבולה. מצאו את משוואת הפרבולה.
 (3) הפרבולה שמצאתם בסעיף הקודם חותכת את האליפסה שמצאתם בסעיף א' בנקודה A. נסמן ב- E את מוקד הפרבולה. בטאו באמצעות m את היקף המשולש AEF_1 .
 ג. מן המוקד השמאלי של האליפסה שמצאתם בסעיף א' יוצאים שני משיקים לפרבולה שמצאתם בסעיף ב-2).
 (1) מצאו את נקודות ההשקה T ו-Q (הנקודה T נמצאת ברביע הראשון) של המשיקים עם הפרבולה והראו שהישר TQ עובר דרך המוקד הימני של האליפסה.
 (2) דרך הנקודה T מעבירים ישר המאונך לציר ה- x . הישר חותך את האליפסה בנקודה P ברביע הראשון. מצאו את היחס בין שטח המשולש F_2TP לבין שטח המשולש F_2PF_1 .



2. נתונה פירמידה משולשת SABC.

נסמן: נסמן: $\vec{AC} = \underline{u}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 64, \underline{u} \cdot \underline{w} = 56, \underline{v} \cdot \underline{w} = 68$$

$$\vec{AH} = \frac{6}{13} \cdot \vec{AC} + \frac{5}{13} \cdot \vec{AB} \quad \text{ומתקיים:}$$

הווקטור $\vec{SH}$ מאונך למישור המשולש ABC.

א. (1) הסבירו מדוע הנקודה H נמצאת במישור ABC.

(2) חשבו את אורכי המקצועות AB ו- AC.

(3) חשבו את שטח המשולש ABC.

ב. נתון: $S(4;6;6)$, $C(2;8;0)$, $B(8;b;0)$, $A(0;0;0)$.

(1) מצאו את b אם נתון $b > 0$.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה H והראו כי $SH \perp AH$.

ג. (1) מצאו משוואת מישור π המקיים: המישור עובר דרך הנקודה A, חותך את הקטע SH

בנקודה P ומקביל לישר BC. נתון: $\frac{SP}{PH} = \frac{13}{11}$.

(2) חשבו את הזווית שיוצר הישר AH עם המישור π .

(3) המישור π חותך את המקצועות SC ו- SB בנקודות E ו- F בהתאמה.

הראו שהקטע EF מקביל לקטע CB.

3. א. (1) הראו שהמקומות הגיאומטריים של הנקודות במישור של גאוס המקיימים את המשוואות

$$|z| = 4 \quad \text{ו-} \quad |z - 8i| = 4$$

הם שני מעגלים בעלי רדיוסים שווים המשיקים זה לזה

מבחוץ. שרטטו את המעגלים במישור של גאוס.

(2) הראו כי אחד הפתרונות של המשוואה $z^2 - 3iz + 4 = 0$ מיוצג במישור של גאוס

על ידי נקודת ההשקה של שני המעגלים שמצאתם בסעיף הקודם.

ב. (1) מצאו את פתרונות המשוואה $z^5 = 512\sqrt{3} - 512 \cdot i$ והראו שהם יוצרים מחומש משוכלל

החסום במעגל המתואר על ידי המשוואה $|z| = 4$.

(2) הסבירו מדוע פתרונות המשוואה $(z - 8i)^5 = 512\sqrt{3} - 512 \cdot i$ מייצגים מחומש משוכלל

החסום במעגל המתואר על ידי המשוואה $|z - 8i| = 4$.

ג. אחד הפתרונות של המשוואה $z^5 = 512\sqrt{3} - 512 \cdot i$ מיוצג במישור של גאוס על-ידי

הנקודה A הנמצאת ברביע השלישי.

נסמן ב- M את מרכז המעגל המתואר על ידי המשוואה $|z - 8i| = 4$.

הנקודה B המייצגת את אחד הפתרונות של המשוואה $(z - 8i)^5 = 512\sqrt{3} - 512 \cdot i$

נמצאת משמאל לציר ה- y כך שהמרובע AOMB הוא מקבילית (O ראשית הצירים).

חשבו את הזווית $\angle BOA$.

פרק שני- פונקציה מעריכית ופונקציה לוגריתמית

4. א. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{18}{e^{2x} + b} + a$, $a > 0$. משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת

החיתוך שלה עם ציר y היא: $y = -\frac{9}{16}x - 0.25$. מצאו את a ואת b .

ב. הציבו $a = 2$, $b = -9$ וענו על הסעיפים הבאים:

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצאו אסימפטוטות לגרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

(4) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(e^{2x} - 9) - 2x$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הראו כי מתקיים: $g'(x) = f(x) - 2$.

(3) השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x , הישר $x = \ln(4)$

והישר $x = \ln(t)$, $t > 4$, הוא $\ln\left(\frac{16}{7}\right)$. מצאו את הערך של t .

5. נתונה הפונקציה $f(x) = -4(\log_{e^2}(x))^2 - \ln(\frac{x}{e^2})$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) הראו כי מתקיים: $f(x) = -\ln^2(x) - \ln(x) + 2$

(3) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

(4) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.

(5) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באותו תחום בו מוגדרת הפונקציה $f(x)$ ומקיימת: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

(1) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(2) בצויר שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$

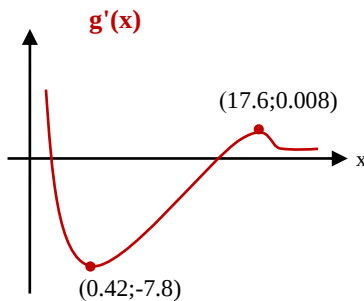
של הפונקציה $g(x)$. היעזרי בנתונים הרשומים בגרף ומצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי

מטה של הפונקציה $g(x)$.

(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(4) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(5) חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x הישר $x = e$ והישר $x = 1$.



ג. נגדיר פונקציה נוספת $h(x) = \int_{0.5}^x (g(t) - f(t))dt$.

(1) קבעו מה נכון: I. $h(e) - h(1) > 0$ II. $h(e) - h(1) < 0$

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $h(x)$.

בהצלחה!

תשובות

$$1. \text{ א. } \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1 \quad \text{ב. } 18 - 2m \quad (1) \quad y^2 = 54x \quad (2) \quad m + 25.5 \quad (3)$$

$$2.6 \quad (1) \quad Q(6; -18), T(6; 18) \quad (2)$$

$$2. \text{ א. } (2) \quad \overline{AB} = 10, \overline{AC} = \sqrt{68} \quad (3) \quad S_{\triangle ABC} = 26 \quad \text{ב. } b = 6 \quad (1) \quad H(4; 6; 0) \quad (2)$$

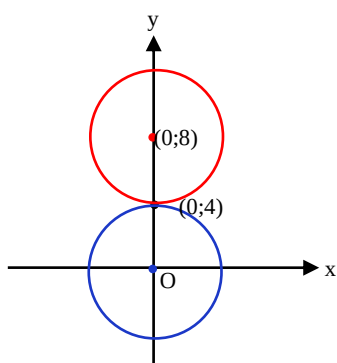
$$20.77^\circ \quad (2) \quad x + 3y - 8z = 0 \quad (1)$$

$$3. \text{ א. } (1) \quad x^2 + y^2 = 16, x^2 + (y - 8)^2 = 16$$

$$(2) \quad \text{הפתרון } z = 4i$$

$$\text{ב. } (1) \quad 4\text{cis}66^\circ, 4\text{cis}138^\circ, 4\text{cis}210^\circ, 4\text{cis}282^\circ, 4\text{cis}354^\circ$$

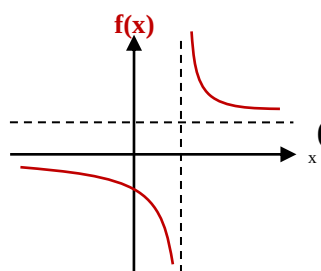
$$\text{ג. } 90^\circ$$



$$4. \text{ א. } a = 2, b = -9 \quad \text{ב. } (1) \quad x \neq \ln(3) \quad (2) \quad x = \ln(3)$$

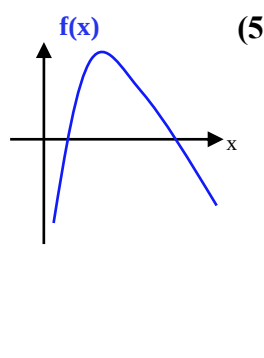
$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y = 2, x \rightarrow -\infty \Rightarrow y = 0$$

$$y = 0, y = 2$$



$$(3) \quad \text{תחום עלייה: אף } x, \text{ תחום ירידה: } x < \ln(3), x > \ln(3)$$

$$\text{ג. } (1) \quad x > \ln(3) \quad (3) \quad t = 5$$



(5)

$$5. \text{ א. } (1) \quad x > 0 \quad (3) \quad (e; 0), (e^{-2}; 0) \quad (4) \quad (0.61; 2.25) \quad \text{מקסימום}$$

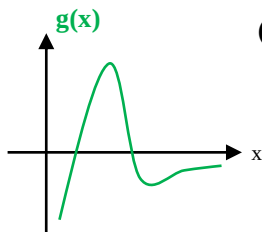
$$\text{ב. } (1) \quad (e; 0), (e^{-2}; 0) \quad (2) \quad \text{קעירות כלפי מעלה: } 0.42 < x < 17.6$$

$$(3) \quad \text{קעירות כלפי מטה: } 0 < x < 0.42, x > 17.6$$

$$(4) \quad (1; 2), (e^{-2}; 0), (e; 0) \quad (5) \quad \frac{7}{6}$$

$$\text{ג. } (1) \quad \text{II. } (2) \quad \text{תחומי העלייה: } 0.5 < x < 1, x > e$$

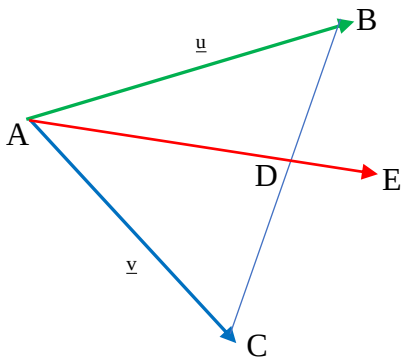
$$\text{תחום הירידה: } 1 < x < e$$



מבחן מס' 2

פרק ראשון: גיאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים

1. נתונה אליפסה קנונית שאורך צירה הגדול ארוך פי 2 מן המרחק בין מוקדיה. הנקודות E_1 ו- E_2 הן , בהתאמה, המוקד הימני והמוקד השמאלי של האליפסה .
נתון מעגל M שמשוואתו $(x - 13)^2 + y^2 = 32$. שני משיקים למעגל היוצאים מן המוקד הימני של האליפסה הנתונה, מאונכים זה לזה.
א. (1) מצאו את משוואת האליפסה אם ידוע כי מוקדה משמאל לישר $x = 10$.
(2) סרטטו באותה מערכת צירים את המעגל ואת האליפסה והסבירו מדוע המעגל והאליפסה נחתכים בשתי נקודות.
(3) מצאו את שיעורי נקודות ההשקה של המשיקים המתוארים בנתון, עם המעגל.
(4) נסמן ב- P את נקודת החיתוך של המעגל והאליפסה הנמצאת ברביע הראשון.
חשבו את סכום הקטעים $PE_1 + PE_2 + PM$.
ב. מזיזים את המעגל M , 13 יחידות שמאלה וכופלים ב- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ את ערכי ה- y של כל אחת מן הנקודות על המעגל שהתקבל , כך שנוצרת אליפסה. מצאו את משוואת האליפסה.



2. א. נתונים הווקטורים $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ היוצרים משולש ABC.

$$\text{הנקודה E מקיימת: } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v}$$

(1) הסבירו מדוע הווקטור $\overrightarrow{AE}$ נמצא במישור המשולש ABC.

(2) הישרים AE ו-BC נחתכים בנקודה D.

חשבו את היחס בו מחלקת הנקודה D את הקטע BC.

ב. נתון: $A(5;-1;4)$, $\underline{v} = (1;-1;0)$, $\underline{u} = (-2;1;2)$.

(1) חשבו את שטח המשולש ABC.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה E.

(3) מצאו את משוואת המישור π_1 בו נמצא המשולש ABC.

(4) המישור π_1 חותך את ציר ה-x בנקודה K, את ציר ה-y בנקודה L ואת ציר ה-z בנקודה M.

חשבו את נפח הפירמידה שיוצרות הנקודות K, L ו-M עם ראשית הצירים O.

(5) היעזרו בסעיפים קודמים וחשבו את שטח המשולש KLM.

ג. הישר ℓ חותך את המישור π_1 בנקודה E ומקביל לישר OA.

(1) מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ .

(2) מצאו משוואת מישור π_2 המכיל את הישר ℓ ומקביל לווקטור $\underline{u}$.

(3) חשבו את הזווית בין המישורים π_1 ו- π_2 .

(4) חשבו את מרחק הישר OA מן המישור π_2 .

(5) מצאו את ישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_2 .

3. א. הראו המקום הגיאומטרי של הנקודות z במישור של גאוס המקיימות את המשוואה

$$|z - 3| = \left| 6 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}\bar{z} \right|$$

הוא אליפסה ומצאו את משוואתה.

ב. נתון המספר המרוכב $z = a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, a פרמטר חיובי. הנקודה A המייצגת את z במישור

של גאוס, נמצאת על מעגל העובר דרך מוקדי האליפסה שמצאתם בסעיף א' ומרכזו בראשית הצירים O . הנקודה A היא קודקוד הראש של משולש ישר-זווית ושווה שוקיים ABC החסום במעגל (הנקודה B נמצאת מעל הנקודה A).

(1) מצאו את a .

(2) מצאו את שני הקודקודים האחרים של המשולש.

ג. הנקודה P היא אמצע הקשת AB והנקודה Q היא אמצע הקשת AC במעגל O .

המספרים z_C, z_Q, z_A, z_P, z_B הנם פתרונות של המשוואה $z^n = a + bi$, $n < 10$.

(1) מצאו את n .

(2) מצאו את שאר הפתרונות של המשוואה $z^n = a + bi$.

פרק שני- פונקציה מעריכית ופונקציה לוגריתמית

4. א. לשני כלים במעבדה הוכנסה אותה כמות של חיידקים. מספר החיידקים בכלי א' גדל ב- 40.255% כעבור 5 שעות. מספר החיידקים בכלי ב' גדל ב- 36.857% כעבור 8 שעות.

(1) מהו אחוז הריבוי לשעה של כל אחד מסוגי החיידקים ?

(2) כעבור כמה שעות יהיה מספר החיידקים בכלי א' גדול פי 1.5 ממספר החיידקים בכלי ב' ?

(3) שש שעות לאחר הכנסת החיידקים לכלים היו בשני הכלים גם יחד 1383 חיידקים.

כמה חיידקים הוכנסו לכל אחד מן הכלים ?

ב. (1) כתבו את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ המתארות, בהתאמה, את תהליך התרבות החיידקים

בכלים א' ו- ב' במהלך יממה מתחילת הניסוי.

(2) סרטטו, באותה מערכת צירים, את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(3) הישר $x = t$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

הביעו באמצעות t את היחס בין שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה A לבין שיפוע המשיק

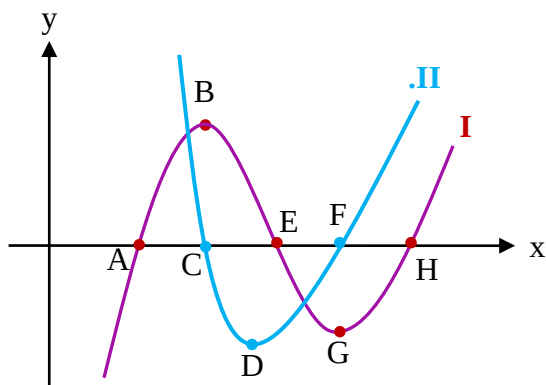
לפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

(4) מצאו את שיפועי המשיקים בנקודות A ו- B עבור $t = 12$.

ג. נתונות הפונקציות: $h(x) = \ln(f(x))$ ו- $k(x) = \ln(g(x))$ המוגדרות בתחום $1 \leq x \leq 24$.

(1) הראו שהפונקציות $h(x)$ ו- $k(x)$ הן פונקציות קוויות.

(2) שרטטו, באותה מערכת צירים, את הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו- $k(x)$.



5. בשרטוט שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$

ו- $f'(x)$ המוגדרות בתחום $x > 0$. בשרטוט מסומנות נקודות החיתוך עם ציר ה- x ונקודות הקיצון של הפונקציות I. ו-II.

א. (1) זהו איזה מן הגרפים I או II הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$ ואיזה של הפונקציה $g(x)$. במקור.
 (2) המרחק בין המשיקים לגרף הפונקציה I. בנקודות B ו-G המסומנות בשרטוט הוא 0.84 יחידות.
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף II. וציר ה- x .

א. (1) נתון: $f(x) = 6\ln(x) + x^3 - 3x^2 - ax + b$. הנקודה B נמצאת על הישר $x = 1$. מצאו את ערך הפרמטר a.

(2) הישר $y = 0.5$ משיק לגרף הפונקציה I. שטח המשולש BCF הוא 0.25. מצאו את ערך הפרמטר b ואת שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

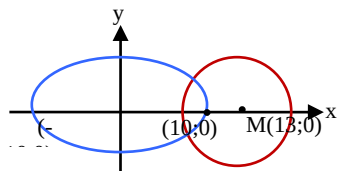
(3) נתון: שטח המשולש CDF הוא 0.63. חשבו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.

$$ג. נתונה הפונקציה $h(x) = 6\ln\left(\frac{x}{e}\right) + x^3 - 3x^2 - ax + b$.$$

האם נכונה הטענה: גרף הפונקציה $h(x)$ הנו הזזה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)$ שש יחידות כלפי מטה? נמקו.

ד. נתונה הפונקציה $k(x)$ המקיימת: $k'(x) = -f'(x - 4)$. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $k(x)$ וקבעו את סוגן.

בהצלחה!

תשובות

(2

$$1. \text{ א. } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$$

$$3 \text{ (9;4) ו- (9;-4) } 4 \text{ 25.656 } \text{ ב. } \frac{x^2}{32} + \frac{x^2}{16} = 1$$

$$2. \text{ א. } \frac{BD}{DC} = 2:1 \text{ (2 ב. } 1.5 \text{ (2 } E(5;-1.25;4.5) \text{ (3 } 2x + 2y + z - 12 = 0 \text{ (4 } 72$$

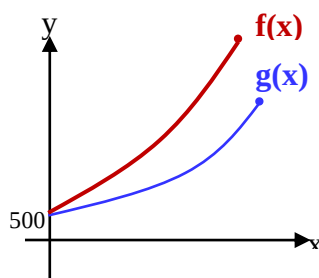
$$5 \text{ (5 } 54 \text{ ג. } 1 \text{ (1 } \ell: \underline{x} = (5;-1.25;4.5) + t(5;-1;4)$$

$$3 \text{ (3 } 38.66^\circ \text{ (4 } \frac{2}{\sqrt{41}} \text{ (5 } \underline{x} = (2.5;0;7) + r(-2;1;2)$$

$$3. \text{ א. } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1 \text{ ב. } a = 3 \text{ (2 } z_B = 3\text{cis}60^\circ, z_C = 3\text{cis}240^\circ$$

$$\text{ג. } n = 8 \text{ (2 } 3\text{cis}330^\circ, 3\text{cis}285^\circ, 3\text{cis}15^\circ$$

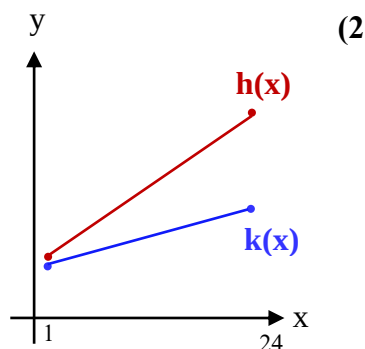
$$4. \text{ א. } 1 \text{ (1 בכלי א': } 7\% \text{ , בכלי ב': } 4\% \text{ (2 כעבור 14.26 שעות (3 500 חיידקים$$



$$\text{ב. } 1 \text{ (1 } f(x) = 500 \cdot 1.07^x, g(x) = 500 \cdot 1.04^x \text{ (2 } 0 \leq x \leq 24$$

$$3 \text{ (3 } 1.725 \cdot 1.0288^t \text{ (4 } f'(12) = 76.19, g'(12) = 31.4$$

$$\text{ג. } 1 \text{ (1 } h(x) = 6.21 + 0.068 \cdot x, k(x) = 6.21 + 0.039 \cdot x$$



$$5. \text{ א. } 1 \text{ (1 גרף I. - } f(x) \text{ , גרף II. - } f'(x) \text{ (2 } 0.84 \text{ ב. } a = 3$$

$$2 \text{ (2 } b = 5.5 \text{ , } B(1;0.5) \text{ נקודת מקסימום , } G(2;-0.34) \text{ נקודת מינימום (3 } -1.26$$

$$\text{ג. הטענה נכונה ד. } x = 5 \text{ מינימום , } x = 6 \text{ מקסימום}$$

