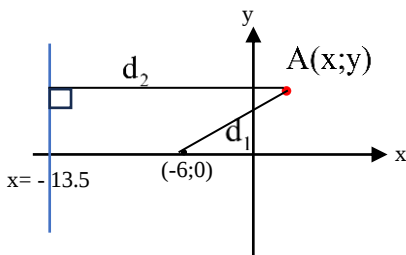


מבחן מס' 1

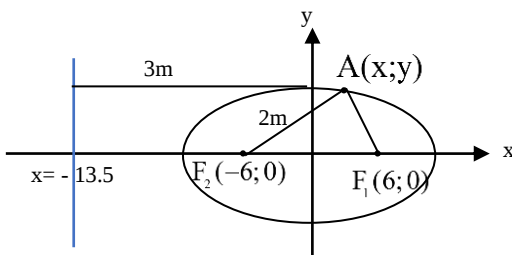
פתרון שאלה מס' 1



א. נתון: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+6)^2 + y^2}}{|x+13.5|} = \frac{2}{3}$

$$9(x^2 + 12x + 36 + y^2) = 4(x^2 + 27x + 13.5^2) \Rightarrow$$

$$5x^2 + 9y^2 = 405 \Rightarrow \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$$



ב. $c^2 = a^2 - b^2 = 81 - 45 = 36 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow$ (1)
מוקדי האליפסה: $F_1(-6;0)$, $F_2(6;0)$

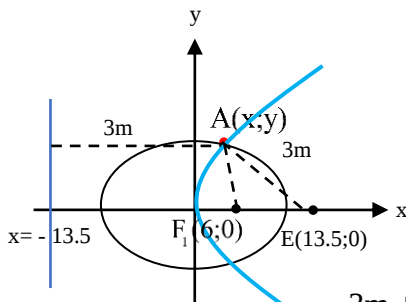
נתון: $d_2 = 3m$, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_1 = 2m$

כל נקודה על האליפסה מקיימת:

$$d_1 + d_2 = 2a \Rightarrow AF_1 + AF_2 = 18$$

$$\Rightarrow 2m + AF_1 = 18 \Rightarrow AF_1 = 18 - 2m$$

(2) מדריך הפרבולה $y^2 = 2px$ הנו הישר $x = -\frac{p}{2}$, לכן: $\frac{p}{2} = 13.5 \Rightarrow 2p = 54 \Rightarrow y^2 = 54x$



(3) הנקודה A נמצאת על האליפסה לכן $AF_2 = 2m$

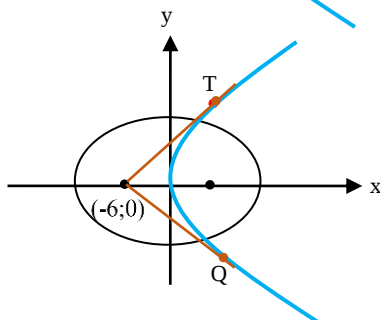
הנקודה A נמצאת גם על הפרבולה לכן מרחקה ממוקד

הפרבולה E שווה למרחקה מן המדריך: $AE = 3m$

המרחק בין המוקד הימני של האליפסה לבין מוקד

הפרבולה הוא $13.5 - 6 = 7.5$

היקף המשולש AF_1E הוא: $3m + 18 - 2m + 7.5 + 12 = m + 25.5$



ג. (1) נסמן את הנקודה T: $T(x_T; y_T)$. משוואת המשיק לפרבולה

$$y \cdot y_T = p(x + x_T) : T \text{ בנקודה } y^2 = 54x$$

$$P = 27 \text{ לכן } y \cdot y_T = 27(x + x_T) : \text{ המשיק עובר}$$

בנקודה $(-6;0)$ לכן נקבל:

$$0 = 27(-6 + x_T) \Rightarrow x_T = 6 \Rightarrow (y_T)^2 = 54 \cdot 6 \Rightarrow y_T = \pm 18$$

קיבלנו: $Q(6; -18)$, $T(6; 18)$. הישר TQ הנו הישר $x = 6$

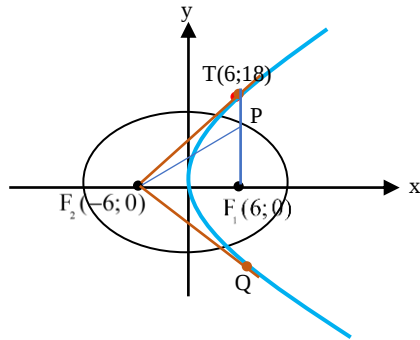
והוא עובר דרך המוקד הימני של האליפסה.

$$(2) \text{ הנקודה } P : \frac{x_p^2}{81} + \frac{y_p^2}{45} = 1, x_p = 6$$

$$\frac{36}{81} + \frac{y_p^2}{45} = 1 \Rightarrow y_p^2 = 25 \Rightarrow y_p = 5 \Rightarrow P(6;5)$$

למשולשים F_2TP ו- F_2PF_1 גובה משותף F_2F_1

$$\text{לכן היחס בין שטחי המשולשים הוא } \frac{TP}{PF_1} = \frac{13}{5} = 2.6$$



פתרון שאלה מס' 2

א. (1) הווקטור $\overrightarrow{AH} = \frac{6}{13} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{5}{13} \cdot \overrightarrow{AB}$ הוא קומבינציה ליניארית של הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AB}$

הקובעים את מישור המשולש ABC , לכן הוא נמצא במישור שנקבע על ידם.

(2) הווקטור $\overrightarrow{SH}$ מאונך למישור המשולש ABC לכן הוא מאונך לכל אחד מן הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AH} = -\underline{w} + \frac{6}{13} \cdot \underline{u} + \frac{5}{13} \cdot \underline{v} \Rightarrow$$

$$\left(-\underline{w} + \frac{6}{13} \cdot \underline{u} + \frac{5}{13} \cdot \underline{v}\right) \cdot \underline{u} = 0, \left(-\underline{w} + \frac{6}{13} \cdot \underline{u} + \frac{5}{13} \cdot \underline{v}\right) \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow$$

$$-\underline{w} \cdot \underline{u} + \frac{6}{13} \cdot |\underline{u}|^2 + \frac{5}{13} \cdot \underline{v} \cdot \underline{u} = 0, -\underline{w} \cdot \underline{v} + \frac{6}{13} \cdot \underline{u} \cdot \underline{v} + \frac{5}{13} \cdot |\underline{v}|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-56 + \frac{6}{13} \cdot |\underline{u}|^2 + \frac{5}{13} \cdot 64 = 0 \Rightarrow \frac{6}{13} \cdot |\underline{u}|^2 = \frac{408}{13} \Rightarrow |\underline{u}| = \sqrt{68} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \sqrt{68}$$

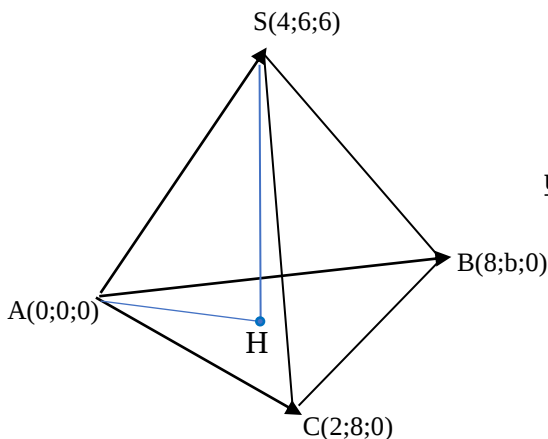
$$-68 + \frac{6}{13} \cdot 64 + \frac{5}{13} \cdot |\underline{v}|^2 = 0 \Rightarrow \frac{5}{13} \cdot |\underline{v}|^2 = \frac{500}{13} \Rightarrow |\underline{v}|^2 = 100 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 10$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin \angle BAC \quad (3)$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \angle BAC \Rightarrow 64 = \sqrt{68} \cdot 10 \cdot \cos \angle BAC \Rightarrow$$

$$\cos \angle BAC = 0.776 \Rightarrow \sin \angle BAC = \sqrt{1 - 0.776^2} = 0.6306 \Rightarrow$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{68} \cdot 10 \cdot 0.6306 = 26 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 26$$



$$\overrightarrow{AB} = (8 - 0; b - 0; 0) = (8; b; 0) \quad (1) \quad \text{ב.}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 10 \Rightarrow \sqrt{8^2 + b^2} = 10 \Rightarrow b^2 = 36, b > 0 \Rightarrow \mathbf{b = 6}$$

$$\underline{u} = \overrightarrow{AC} = (2; 8; 0) \quad \underline{v} = \overrightarrow{AB} = (8; 6; 0), \quad \underline{w} = \overrightarrow{AS} = (4; 6; 6) \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{6}{13} \underline{u} + \frac{5}{13} \underline{v} = \frac{1}{13} (6\underline{u} + 5\underline{v}) =$$

$$\frac{1}{13} [6(2; 8; 0) + 5(8; 6; 0)] = \frac{1}{13} (52; 78; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (4; 6; 0)$$

$$\Rightarrow (x_H - x_A; y_H - y_A; z_H - z_A) = (4; 6; 0)$$

$$\Rightarrow (x_H - 0; y_H - 0; z_H - 0) = (4; 6; 0) \Rightarrow$$

$$x_H = 4; y_H = 6; z_H = 0 \Rightarrow \mathbf{H(4; 6; 0)} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{SH} = (4 - 4; 6 - 6; 0 - 6) = (0; 0; -6) \Rightarrow \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AH} = (0; 0; -6) \cdot (4; 6; 0) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{SH} \perp \overrightarrow{AH}$$

$$\Leftarrow \overrightarrow{SP} = \frac{13}{24} \overrightarrow{SH} \Leftarrow \frac{SP}{PH} = \frac{13}{11} \quad \text{ג. (1) נמצא תחילה את שיעורי הנקודה P}$$

$$(x_P - 4; y_P - 6; z_P - 0) = \frac{13}{24} (0; 0; -6) = (0; 0; -\frac{13}{4}) \Rightarrow$$

$$x_p = 4; y_p = 6; z_p = 6 - \frac{13}{4} = 2.75 \Rightarrow P(4; 6; 2.75)$$

משוואת המישור π : נקודה על המישור : $A(0;0;0)$, ווקטורי הכיוון: $\overrightarrow{AP} = (4; 6; 2.75)$

$$\text{ו-} \quad \overrightarrow{BC} = (2 - 8; 8 - 6; 0) = (-6; 2; 0) = 2(-3; 1; 0)$$

נמצא את הווקטור $(a; b; c)$ המאונך למישור:

$$(a; b; c) \cdot (4; 6; 2.75) = 0 \Rightarrow 4a + 6b + 2.75c = 0$$

$$(a; b; c) \cdot (-3; 1; 0) = 0 \Rightarrow -3a + b = 0 \Rightarrow b = 3a \Rightarrow$$

$$4a + 18a + 2.75c = 0 \Rightarrow 2.75c = -22a \Rightarrow c = -8a$$

נקבע $a = 1$ ונקבל : $c = -8$, $b = 3$. המישור עובר דרך ראשית הצירים ,

$$\text{לכן משוואת המישור } \pi : \mathbf{x + 3y - 8z = 0}$$

(2) $\overrightarrow{AH} = (4; 6; 0) = 2(2; 3; 0)$. ווקטור הכיוון של הישר AH הוא $(2; 3; 0)$, הווקטור האנך

$$\text{למישור } \pi \text{ הוא } (1; 3; -8) \text{ לכן : } \alpha = 20.77^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \frac{|(2; 3; 0) \cdot (1; 3; -8)|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{74}} = \frac{11}{\sqrt{962}}$$

(3) ההצגה הפרמטרית של הישר SC :

$$\underline{x} = (2; 8; 0) + t(2 - 4; 8 - 6; 0 - 6) = (2; 8; 0) + t(-2; 2; -6)$$

לכן נוכל לסמן : $E(2 - 2t; 8 + 2t; -6t)$. נציב במשוואת המישור π :

$$2 - 2t + 3(8 + 2t) - 8(-6t) = 0 \Rightarrow 2 - 2t + 24 + 6t + 48t = 0 \Rightarrow$$

$$52t = -26 \Rightarrow t = -0.5 \Rightarrow E(3; 7; 3)$$

ההצגה הפרמטרית של הישר SB :

$$\underline{x} = (8; 6; 0) + q(8 - 4; 6 - 6; 0 - 6) = (8; 6; 0) + q(4; 0; -6)$$

לכן נוכל לסמן : $F(8 + 4q; 6; -6q)$. נציב במשוואת המישור π :

$$8 + 4q + 3 \cdot 6 - 8(-6q) = 0 \Rightarrow 8 + 4q + 18 + 48q = 0 \Rightarrow 52q = -26 \Rightarrow$$

$$q = -0.5 \Rightarrow F(6; 6; 3) \Rightarrow \overrightarrow{EF} = (6 - 3; 6 - 7; 3 - 3) = (3; -1; 0)$$

$$\overrightarrow{CB} = 2(3; -1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{EF} \Rightarrow EF \parallel CB$$

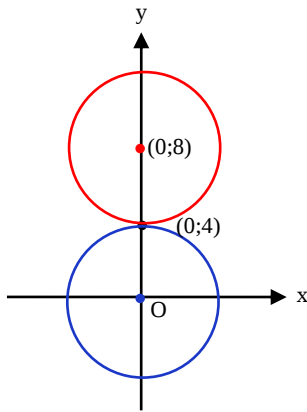
פתרון שאלה מס' 3א. (1) נסמן $z = x + yi$.

עבור $|z| = 4$ מקבלים: $|x + yi| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$
 התקבל מעגל שמרכזו בראשית הצירים O ורדיוסו 4.

עבור $|z - 8i| = 4$ מקבלים: $|x + yi - 8i| = 4 \Leftrightarrow |x + (y - 8)i| = 4$

$$|x + yi - 8i| = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 8)^2} = 4 \Rightarrow x^2 + (y - 8)^2 = 16$$

התקבל מעגל שמרכזו בנקודה (0;8) ורדיוסו 4.
 לכן, המעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה (0;4).



$$z_{1,2} = \frac{3i \pm \sqrt{(3i)^2 - 4 \cdot 4}}{2} \Leftrightarrow z^2 - 3iz + 4 = 0 \quad (2)$$

$$= \frac{3i \pm \sqrt{-9 - 16}}{2} = \frac{3i \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{3i \pm 5i}{2} \Rightarrow$$

$z_1 = 4i, z_2 = -i$. הנקודה (0;4) מייצגת במישור של

גאוס את המספר $z = 4i$ שהנו אחד מפתרונות המשוואה.

ב. (1) פתרונות המשוואה: $z^5 = 512\sqrt{3} - 512 \cdot i$.

נמצא הצגה קוטבית של המספר $512\sqrt{3} - 512 \cdot i$:

$$\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = -30^\circ + 180^\circ k, \quad R = \sqrt{(512\sqrt{3})^2 + (512)^2} = 1024$$

המספר נמצא ברביע הרביעי לכן $360^\circ < \theta < 270^\circ \Rightarrow \theta = 330^\circ$.

$$512\sqrt{3} - 512 \cdot i = 1024 \text{cis} 330^\circ$$

$$z_k = 4 \text{cis}(66^\circ + 72^\circ k) \Leftrightarrow z^5 = 1024 \text{cis}(330^\circ + 360^\circ k)$$

$$4 \text{cis} 66^\circ, 4 \text{cis} 138^\circ, 4 \text{cis} 210^\circ, 4 \text{cis} 282^\circ, 4 \text{cis} 354^\circ$$

כל הפתרונות נמצאים על המעגל $x^2 + y^2 = 16$.

5 הנקודות המייצגות את 5 הפתרונות במישור של גאוס נמצאות על מעגל שמרכזו בראשית

הצירים ורדיוסו 4, הזווית המרכזית על כל אחת מן הקשתות הכלואות בין שני פתרונות

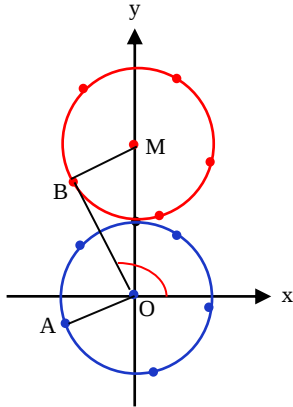
עוקבים היא 72° , לכן נוצר מחומש משוכלל החסום במעגל.

(2) נתונה משוואה חדשה: $(z - 8i)^5 = 512\sqrt{3} - 512 \cdot i$. נסמן: $z - 8i = w$. תתקבל המשוואה

$$w^5 = 512\sqrt{3} - 512 \cdot i$$

היות ו- $z = w + 8i$, אם פתרונות המשוואה $w^5 = 512\sqrt{3} - 512 \cdot i$ הם

מהצורה $z_k = x + yi$, הרי שפתרונות המשוואה החדשה יהיו מהצורה $z'_k = x + (y + 8)i$



כלומר, כל נקודה המתאימה לפתרון המשוואה

תווז אנכית 8 יחידות כלפי מעלה :

לכן, נוצר מחומש משוכלל החסום במעגל $x^2 + (y - 8)^2 = 16$.

ג. פתרון המשוואה $z^5 = 512\sqrt{3} - 512 \cdot i$ הנמצא ברביע השלישי

הוא המספר $z_A = 4\text{cis}210^\circ = -2\sqrt{3} - 2i$.

המרובע AOMB מקבילית, לכן $AB = OM = 8$

כלומר, הנקודה B מתאימה למספר המרוכב

$$z_B = -2\sqrt{3} - 2i + 8i = -2\sqrt{3} + 6i$$

שיוצר המספר z_B עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $\tan \alpha = -\frac{6}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \alpha = -60^\circ + 180^\circ k, 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

הזווית שיוצר המספר $z_A = 4\text{cis}210^\circ$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x היא בת 210° .

לכן $\angle AOB = 210^\circ - 120^\circ = 90^\circ$

פתרון שאלה מס' 4

א. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{18}{e^{2x} + b} + a$ עם ציר ה- y : $f(0) = \frac{18}{1+b} + a$

$$\frac{18}{1+b} + a = -0.25 \Leftrightarrow y(0) = -0.25$$

$$f'(0) = -\frac{36}{(1+b)^2} = -\frac{9}{16} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{36e^{2x}}{(e^{2x} + b)^2}, f'(0) = -\frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow (1+b)^2 = 64 \Rightarrow 1+b = \pm 8 \Rightarrow b = 7, b = -9$$

$$a = -2.5 \Leftrightarrow \frac{18}{1+7} + a = -0.25$$

$$a = 2, b = -9 \text{ עבור } b = -9 \text{ מקבלים: } a = 2 \Leftrightarrow \frac{18}{1-9} + a = -0.25$$

$$f(x) = \frac{18}{e^{2x} - 9} + 2 \quad (1)$$

$$x \neq \ln(3) \Leftrightarrow 2x \neq \ln(9) \Leftrightarrow e^{2x} \neq 9 \Leftrightarrow e^{2x} - 9 \neq 0$$

(2) אסימפטוטות:

$$x \rightarrow \ln(3)^- \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow \ln(3)^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty \Rightarrow x = \ln(3)$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 2, x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$$

הישרים $y = 0$ ו- $y = 2$ אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y .

$$f(x) = \frac{18}{e^{2x} - 9} + 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{36e^{2x}}{(e^{2x} - 9)^2} \quad (3)$$

הנגזרת שלילית לכל x בתחום ההגדרה, לכן הפונקציה $f(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

$$g(x) = \ln(e^{2x} - 9) - 2x \quad (1) \text{ תחום ההגדרה של הפונקציה}$$

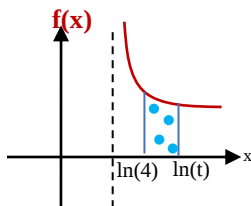
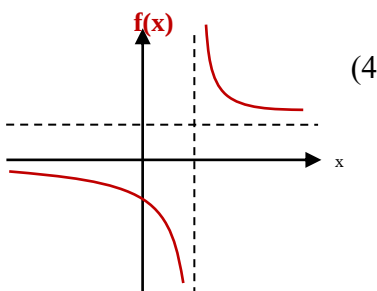
$$e^{2x} - 9 > 0 \Rightarrow e^{2x} > 9 \Rightarrow x > \ln(3)$$

$$g'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 9} - 2 = \frac{2e^{2x} - 2e^{2x} + 18}{e^{2x} - 9} = \frac{18}{e^{2x} - 9} \Rightarrow \quad (2)$$

$$g'(x) = f(x) - 2$$

$$\int_{\ln(4)}^{\ln(t)} f(x) dx = \ln\left(\frac{16}{7}\right) \quad (3) \text{ נתון:}$$

$$f(x) = g'(x) + 2 \Leftrightarrow g'(x) = f(x) - 2$$



$$\begin{aligned}
 \int_{\ln(4)}^{\ln(t)} f(x) dx &= \int_{\ln(4)}^{\ln(t)} (g'(x) + 2) dx = [g(x) + 2x]_{\ln(4)}^{\ln(t)} = \\
 &= [\ln(e^{2x} - 9) - 2x + 2x]_{\ln(4)}^{\ln(t)} = [\ln(e^{2x} - 9)]_{\ln(4)}^{\ln(t)} = \\
 &= \ln(e^{2\ln(t)} - 9) - \ln(e^{2\ln(4)} - 9) = \ln(e^{\ln(t^2)} - 9) - \ln(e^{\ln(16)} - 9) = \\
 &= \ln(t^2 - 9) - \ln(7) = \ln\left(\frac{t^2 - 9}{7}\right) = \ln\left(\frac{16}{7}\right) \Rightarrow \\
 t^2 - 9 &= 16 \Rightarrow t^2 = 25, t > 0 \Rightarrow t = 5
 \end{aligned}$$

פתרון שאלה מס' 5

א. 1) תחום ההגדרה: $x > 0$

$$f(x) = -4\left(\log_{e^2}(x)\right)^2 - \ln\left(\frac{x}{e^2}\right) = -4 \cdot \left(\frac{\ln(x)}{\ln(e^2)}\right)^2 - (\ln(x) - \ln(e^2)) = \quad (2)$$

$$= -4 \cdot \left(\frac{\ln(x)}{2}\right)^2 - (\ln(x) - 2) \Rightarrow f(x) = -\ln^2(x) - \ln(x) + 2$$

3) נסמן $\ln(x) = t$ ונקבל $-t^2 - t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2, t = 1$

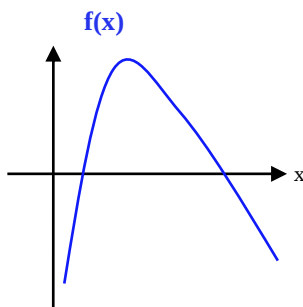
$$\ln(x) = -2 \Rightarrow x = e^{-2} = 0.135, \quad t = 1 \Rightarrow x = e = 2.72$$

מתקבלות הנקודות $(e^{-2}; 0), (e; 0)$

$$f(x) = -\ln^2(x) - \ln(x) + 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2\ln(x) - 1}{x} = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow -2\ln(x) - 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 0.61 \Rightarrow y = 2.25$$

x	0	$< x <$	0.61	$< x$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$



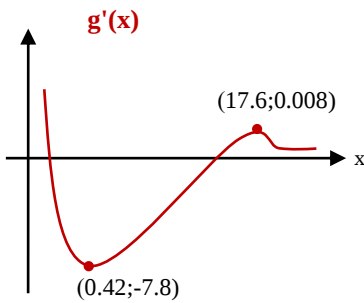
(5)

הנקודה $(0.61; 2.25)$ נקודת מקסימום

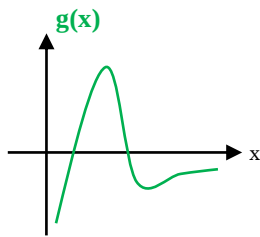
$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{-\ln^2(x) - \ln(x) + 2}{x} = 0 \Rightarrow \quad (1. ב.)$$

$$-\ln^2(x) - \ln(x) + 2 = 0 \Rightarrow (e^{-2}; 0), (e; 0) \text{ מתקבלות הנקודות}$$

(2) על פי הגרף:



x	0	$x < 0.42$	$x < 17.6$	$x < 17.6$	$x < 17.6$	$x < 17.6$
$g'(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$
$g''(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$		$\cap$	פיתול	$\cup$	פיתול	$\cap$

 $g(x)$ קעורה כלפי מעלה בתחום $0.42 < x < 17.6$ וקעורה כלפי מטה בתחום $x > 17.6$, $0 < x < 0.42$ 

(3)

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow x \cdot f(x) = f(x) \Rightarrow x \cdot f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow (4)$$

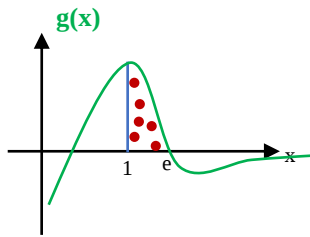
$$f(x)(x-1) = 0 \Rightarrow x=1, f(x)=0 \Rightarrow x=e^{-2}, x=e$$

מתקבלות הנקודות: $(1; 2), (e^{-2}; 0), (e; 0)$

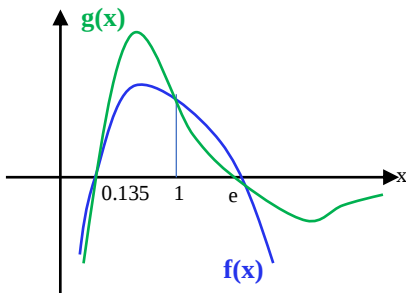
$$S = \int_1^e \left(\frac{-\ln^2(x) - \ln(x) + 2}{x} \right) dx = (5)$$

$$= \int_1^e \left(-\frac{1}{x} \cdot \ln^2(x) - \frac{1}{x} \cdot \ln(x) + \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{\ln^3(x)}{3} - \frac{\ln^2(x)}{2} + 2 \ln(x) \right]_1^e = \frac{7}{6}$$

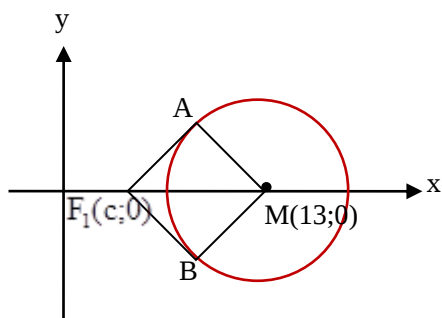
ג. (1) הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכות בשלוש נקודות:בתחום $1 < x < e$ מתקיים $(e^{-2}; 0), (1; 0), (e; 0)$ בתחום $0.5 < x < 1$ מתחת $f(2) = 0.83, g(2) = 0.41$

$$\int_{0.5}^e (g(t) - f(t)) dt < \int_{0.5}^1 (g(t) - f(t)) dt \text{ לכן } f(x) \text{ גרף הפונקציה}$$

לכן $h(e) < h(1)$ לכן טענה II נכונה: $h(e) - h(1) < 0$ (2) בתחום $e^{-2} < x < 1$ מתקיים $f(e^{-1}) = 2, g(e^{-1}) = 2e$ גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעלמער גרף הפונקציה $f(x)$. בתחום $x > e$ מקבלים $f(3) = -0.3, g(3) = -0.102$ גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל גרף הפונקציה $f(x)$. לכן:תחומי העלייה של $h(x)$: $0.5 < x < 1, x > e$ תחום הירידה: $1 < x < e$ 

מבחן מס' 2

פתרון שאלה מס' 1



א. (1) נתון: אליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a = 2c \Leftrightarrow 2a = 4c$,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (2c)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 3c^2$$

נסמן: $F_1(c;0)$ המוקד הימני של האליפסה,

$$M(13;0) \text{ מרכז המעגל } (x-13)^2 + y^2 = 32$$

A ו-B נקודות ההשקה.

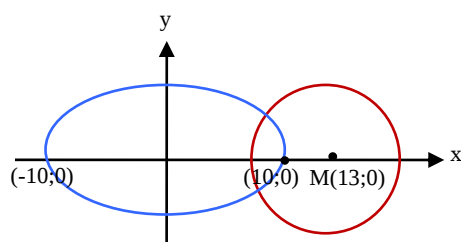
המשיקים מאונכים זה לזה והמשיקים

מאונכים לרדיוסים בנקודות ההשקה, לכן המרובע AF_1BM הוא ריבוע שצלעו שווה לרדיוס

המעגל M, כלומר, $\sqrt{32}$. לכן, מקבלים:

$$F_1M^2 = 2 \cdot 32 = 64 \Rightarrow F_1M = 8 \Rightarrow 13 - c = 8 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow$$

$$a = 10 \Rightarrow b = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \quad \cdot \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1 \quad \text{משוואת האליפסה:}$$



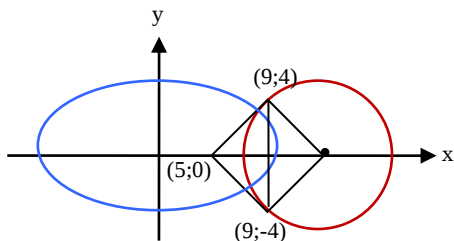
(2) המרחק בין הקודקוד הימני של האליפסה לבין מרכז

המעגל, קטן מרדיוס המעגל והמרחק בין הקודקוד

השמאלי של האליפסה לבין מרכז המעגל, גדול

מרדיוס המעגל, לכן, המעגל והאליפסה נחתכים

בשתי נקודות בעלות אותו ערך של x.



(3) אלכסוני הריבוע F_1AMB נחתכים באמצע האלכסון F_1M

בנקודה $(9;0)$. אלכסוני הריבוע מאונכים זה לזה ושווים זה לזה,

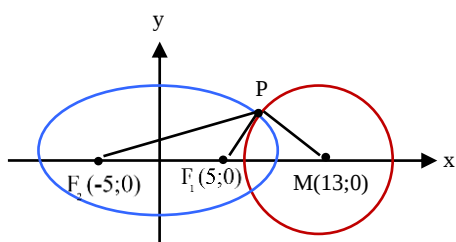
לכן, שיעורי הנקודות A ו-B הם $(9;4)$ ו- $(9;-4)$ בהתאמה.

(4) אורך הציר הגדול של האליפסה הוא 20. לכן: $PF_1 + PF_2 = 20$

כי סכום מרחקי כל נקודה על האליפסה ממוקדיה הוא $2a$.

$$PM = \sqrt{32} \text{ - רדיוס המעגל } (x-13)^2 + y^2 = 32$$

$$\text{לכן: } PF_1 + PF_2 + PM = 20 + \sqrt{32} = 25.656$$



ב. אחרי ההזזה התקבל המעגל הקניני $x^2 + y^2 = 32$

נסמן נקודה כלשהי על המעגל הקניני ב- $(x_1; y_1)$.

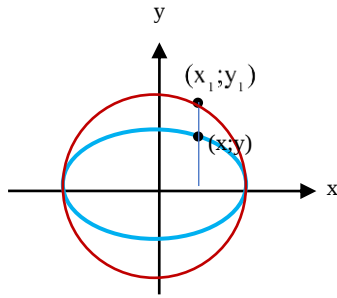
$$\text{מתקיים: } x_1^2 + y_1^2 = 32$$

ישר המאונך לציר ה- x העובר בנקודה $(x_1; y_1)$

חותך את האליפסה שנוצרה בנקודה $(x; y)$.

$$\text{מתקיים: } x = x_1, y = \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{2y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}y$$

$$\text{מקבלים: } x^2 + (\sqrt{2}y)^2 = 32 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 32 \Rightarrow \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$$



פתרון שאלה מס' 2

א. (1) הווקטור $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v}$ הוא קומבינציה

ליניארית של הווקטורים הבלתי תלויים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$

הקובעים את מישור המשולש ABC , לכן הוא נמצא במישור הנקבע על ידם.

(2) נסמן: $\overrightarrow{AD} = \beta \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BD} = \alpha \overrightarrow{BC}$. במשולש ABD מקבלים:

$$\underline{u} + \alpha \overrightarrow{BC} - \beta \left(\frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v} \right) = \underline{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \underline{0}$$

$$\underline{u} + \alpha(-\underline{u} + \underline{v}) - \beta \left(\frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v} \right) = \underline{0} \Rightarrow (1 - \alpha - \frac{1}{4}\beta) \underline{u} + (\alpha - \frac{1}{2}\beta) \underline{v} = 0 \underline{u} + 0 \underline{v}$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha - \frac{1}{4}\beta = 0, \alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \Rightarrow \beta = 2\alpha \Rightarrow 1 - \alpha - \frac{1}{2}\alpha = 0 \Rightarrow 1.5\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

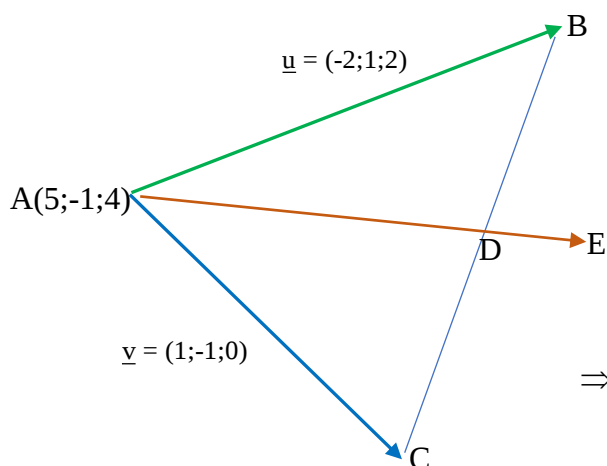
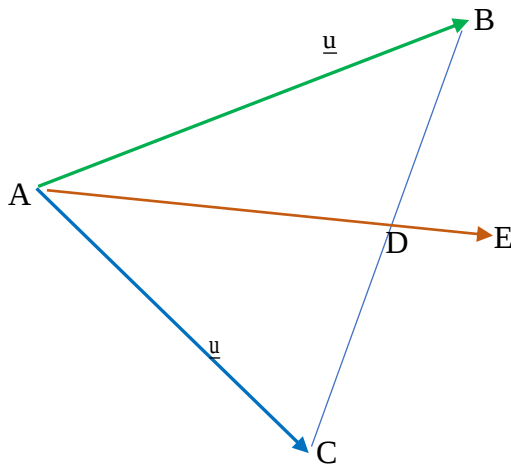
$$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = 2:1$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{4+1+4} = 3 \Leftrightarrow \underline{u} = (-2; 1; 2) \quad (1. \text{ ב.})$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \underline{v} = (1; -1; 0)$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{(-2; 1; 2) \cdot (1; -1; 0)}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \angle BAC = 135^\circ \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 135^\circ = 1.5$$



$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v} = \frac{1}{4}(-2; 1; 2) + \frac{1}{2}(1; -1; 0) = (0; -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \quad (2)$$

$$\Rightarrow (x_E - x_A; y_E - y_A; z_E - z_A) = (0; -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_E - 5; y_E + 1; z_E - 4) = (0; -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$$x_E = 5, y_E = -1.25, z_E = 4.5 \Rightarrow \mathbf{E(5; -1.25; 4.5)}$$

(3) נמצא את הווקטור $(a; b; c)$ המאונך למישור המשולש ABC :

$$(a; b; c) \cdot (-2; 1; 2) = 0, (a; b; c) \cdot (1; -1; 0) = 0$$

$$. b = 2c \Leftarrow -2b + b + 2c = 0 \Leftarrow a = b \Leftarrow -2a + b + 2c = 0, a - b = 0 \Leftarrow$$

נקבע : $c = 1$ ונקבל $a = b = 2$. לכן : $2x + 2y + z + d = 0$. נציב את שיעורי

$$\text{הנקודה } A(5; -1; 4) : d = -12 \Leftarrow 10 - 2 + 4 + d = 0$$

$$\text{משוואת המישור } \pi_1 : 2x + 2y + z - 12 = 0$$

$$K(x; 0; 0) \Rightarrow 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow K(6; 0; 0) \quad (4)$$

$$L(0; y; 0) \Rightarrow 2y - 12 = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow L(0; 6; 0)$$

$$M(0; 0; z) \Rightarrow z - 12 = 0 \Rightarrow z = 12 \Rightarrow M(0; 0; 12)$$

הקטע OM מאונך למישור המשולש KLO, לכן :

$$V_{KLMO} = \frac{S_{AKLO} \cdot MO}{3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 12}{2 \cdot 3} = 72$$

(5) נסמן ב- h את אורך האנך מראשית הצירים O

$$\text{למישור המשולש KLM ונקבל: } V_{KLMO} = \frac{S_{AKLM} \cdot h}{3}$$

המשולש KLM נמצא במישור π_1 , לכן h הוא מרחק

הנקודה O מן המישור $2x + 2y + z - 12 = 0$ ולכן:

$$S_{AKLM} = 54 \Leftarrow \frac{S_{AKLM} \cdot 4}{3} = 72 \Leftarrow h = \frac{|-12|}{\sqrt{4+4+1}} = 4$$

$$\overrightarrow{OA} = (5; -1; 4), E(5; -1.25; 4.5) \Rightarrow \ell : \underline{x} = (5; -1.25; 4.5) + t(5; -1; 4) \quad (1) \text{ ג.}$$

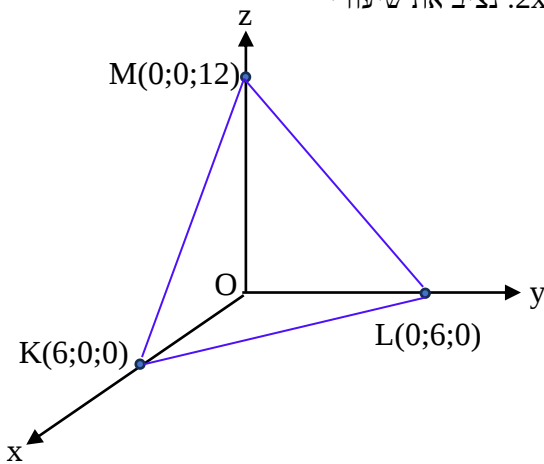
(2) הנקודה $E(5; -1.25; 4.5)$ נמצאת במישור π_2 ושני ווקטורי כיוון של המישור הם

$$\overrightarrow{OA} = (5; -1; 4) \text{ ו- } \underline{u} = (-2; 1; 2) \text{ מקבילים:}$$

$$(a; b; c) \cdot (-2; 1; 2) = 0, (a; b; c) \cdot (5; -1; 4) = 0$$

$$\Leftarrow a = -2c = 0 \Leftarrow 3a + 6c = 0 \Leftarrow -2a + b + 2c = 0, 5a - b + 4c = 0 \Leftarrow$$

$$b = 6, a = 2 \text{ ונקבל } c = -1. \text{ נקבע } b = -6c \Leftarrow 4c + b + 2c = 0 \Leftarrow$$



לכן : $2x + 6y - z + d = 0$. נציב את שיעורי הנקודה $E(5; -1.25; 4.5)$ ונקבל:

$$2x + 6y - z + d = 0 \Rightarrow d = 2 \quad \text{משוואת המישור } \pi_2 : 2x + 6y - z + 2 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{|(2; 2; 1) \cdot (2; 6; -1)|}{3\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha = 38.66^\circ \quad (3)$$

(4) הישר OA מקביל למישור π_2 לכן מרחקו מן המישור שווה למרחק כל אחת מן הנקודות על הישר

מן המישור, בפרט, מרחק ראשית הצירים $O(0; 0; 0)$ מן המישור π_2 :

$$d = \frac{|2|}{\sqrt{4+36+1}} = \frac{2}{\sqrt{41}}$$

(5) ישר החיתוך של המישורים π_1 : $2x + 2y + z - 12 = 0$ ו- π_2 : $2x + 6y - z + 2 = 0$

מפתרון מערכת המשוואות מקבלים : $4y - 2z + 14 = 0 \Leftrightarrow z = 2y + 7 \Leftrightarrow y = r$ נסמן

ונקבל $z = 2r + 7$. נציב ונקבל: $2x + 2r + 2r + 7 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 - 4r \Leftrightarrow x = 2.5 - 2r$

$(x; y; z) = (2.5 - 2r; r; 7 + 2r)$: ישר החיתוך על כללית של הישר

המקיימת את ההצגה הפרמטרית של הישר : $\underline{x} = (2.5; 0; 7) + r(-2; 1; 2)$

פתרון שאלה מס' 3א. נסמן $z = x + yi$ ונקבל:

$$|x + yi - 3| = \left| 6 - \frac{1}{4}(x + yi) - \frac{1}{4}(x - yi) \right| \Rightarrow |(x-3) + yi| = \left| 6 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}yi - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}yi \right|$$

$$|(x-3) + yi| = \left| 6 - \frac{1}{2}x \right| \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{\left(6 - \frac{1}{2}x\right)^2} \Rightarrow$$

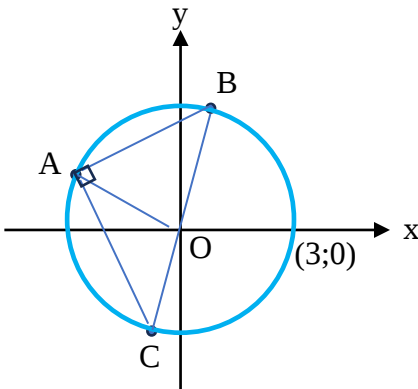
$$(x-3)^2 + y^2 = \left(6 - \frac{1}{2}x\right)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 36 - 6x + \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 27 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 108 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

ב. 1. מוקדי האליפסה: $(3;0)$, $(-3;0)$, $c^2 = 36 - 27 = 9 \Rightarrow$

הנקודה A נמצאת על מעגל קנוני שרדיוסו 3, לכן:

$$.3 = \sqrt{a^2 \left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right)} \Rightarrow 9 = a^2 \Rightarrow a = 3$$

2. מקבלים: $z_A = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$. ההצגה הטריגונומטרית של z_A :

$$R = 3, \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = -30^\circ + 180^\circ k, 90^\circ < \theta < 180^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 150^\circ \Rightarrow z_A = 3\text{cis}150^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 45^\circ \Leftarrow AB = AC, \angle A = 90^\circ \text{ נתון:}$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \angle AOC = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\arg(z_B) = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ, \arg(z_C) = 150^\circ + 90^\circ = 240^\circ \Rightarrow$$

$$z_B = 3\text{cis}60^\circ, z_C = 3\text{cis}240^\circ$$

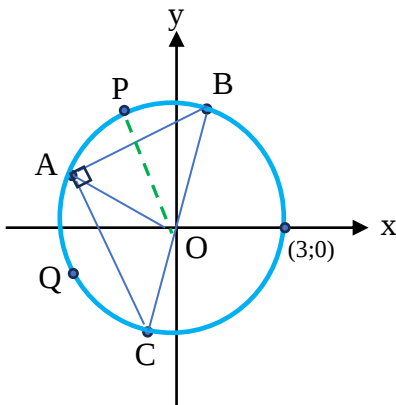
ג. 1. הנקודה P היא אמצע הקשת AB לכן $\angle POB = \angle POA = 45^\circ$.

אם הנקודה Q היא אמצע הקשת AC, נקבל

$$\angle AOQ = \angle QOC = 45^\circ$$

לכן, הנקודות B, P, A, Q ו-C נמצאות על מצולע משוכלל

$$\text{בעל } \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8 \text{ צלעות החסום במעגל O. לכן: } n = 8.$$



(2) $z_A = 3\text{cis}150^\circ$ הנו אחד הפתרונות של המשוואה $z^8 = a + bi$, לכן,

$$z^8 = (3\text{cis}150^\circ)^8 = 3^8 \text{cis}120^\circ \Rightarrow z^8 = 3^8 \text{cis}(120^\circ + 360^\circ k)$$

$$\Rightarrow z_k = 3\text{cis}(15^\circ + 45^\circ k) \Rightarrow z_0 = 3\text{cis}15^\circ, z_1 = 3\text{cis}60^\circ = z_B$$

$$z_2 = 3\text{cis}105^\circ = z_P, z_3 = 3\text{cis}150^\circ = z_A, z_4 = 3\text{cis}195^\circ = z_Q$$

$$, z_5 = 3\text{cis}240^\circ = z_C, z_6 = 3\text{cis}285^\circ, z_7 = 3\text{cis}330^\circ$$

פתרון שאלה מס' 4

א. (1 בכלי א' :

$$M_5 = 1.40255 \cdot M_0 \Rightarrow 1.40255 \cdot M_0 = M_0 \cdot (q_1)^5 \Rightarrow q_1 = 1.07 \Rightarrow$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1.07 \Rightarrow p_1 = 7\%$$

בכלי ב' :

$$M_8 = 1.36857 \cdot M_0 \Rightarrow 1.36857 \cdot M_0 = M_0 \cdot (q_2)^8 \Rightarrow q_2 = 1.04 \Rightarrow$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1.04 \Rightarrow p_2 = 4\%$$

(2) כמות החיידקים בכלי א' כעבור t שעות: $M_t = M_0 \cdot (1.07)^t$.

היות ובכלי ב' יש אותה כמות התחלתית M_0 כמו בכלי א', כמות החיידקים בכלי ב' כעבור t שעות

$$t = 14.26 \Leftarrow \left(\frac{1.07}{1.04} \right)^t = 1.5 \Leftarrow \frac{M_0 \cdot (1.07)^t}{M_0 \cdot (1.04)^t} = 1.5 \text{ נתון: } M_0 \cdot (1.04)^t$$

$$M_0 = 500 \Leftarrow 2.766 \cdot M_0 = 1383 \Leftarrow M_0 \cdot (1.07)^6 + M_0 \cdot (1.04)^6 = 1383 \quad (3)$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq 24 \quad g(x) = 500 \cdot 1.04^x, f(x) = 500 \cdot 1.07^x \quad (1 \text{ ב.})$$

(3) שיפוע המשיק

לגרף הפונקציה

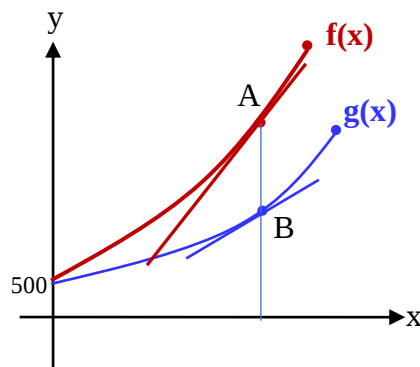
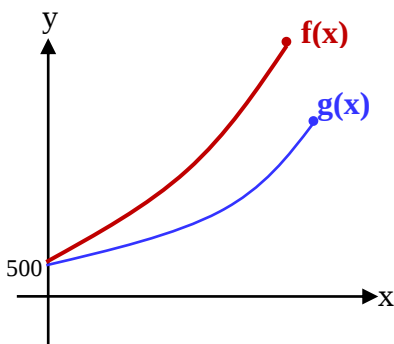
$f(x)$ בנקודה A :

$$f'(x) = 500 \cdot 1.07^x \cdot \ln(1.07) \Rightarrow$$

$$f'(t) = 500 \cdot 1.07^t \cdot \ln(1.07)$$

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה

$g(x)$ בנקודה B :



$$g'(x) = 500 \cdot 1.04^x \cdot \ln(1.04) \Rightarrow g'(t) = 500 \cdot 1.04^t \cdot \ln(1.04) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{500 \cdot 1.07^t \cdot \ln(1.07)}{500 \cdot 1.04^t \cdot \ln(1.04)} = 1.725 \cdot 1.0288^t$$

$$g'(12) = 500 \cdot 1.04^{12} \cdot \ln(1.04) = 31.4, \quad f'(12) = 500 \cdot 1.07^{12} \cdot \ln(1.07) = 76.19 \quad (4)$$

$$h(x) = \ln(f(x)) = \ln(500 \cdot 1.07^x) = \ln(500) + \ln(1.07^x) = 6.21 + x \cdot \ln(1.07) \quad (1 \text{ ג.})$$

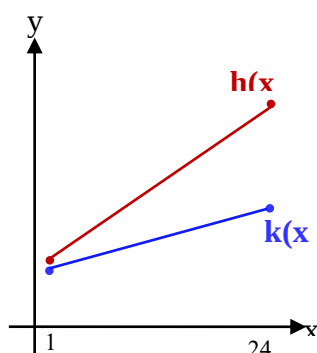
$$\Rightarrow h(x) = 6.21 + 0.068 \cdot x$$

$$k(x) = \ln(g(x)) = \ln(500 \cdot 1.04^x) = \ln(500) + x \cdot \ln(1.04)$$

$$\Rightarrow k(x) = 6.21 + 0.039 \cdot x$$

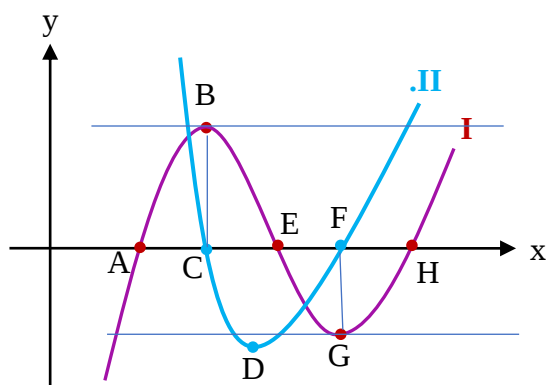
$$k(24) = 7.15, \quad k(1) = 6.25, \quad h(24) = 7.8, \quad h(1) = 6.3 \quad (2)$$

מתקבל הגרף:



פתרון שאלה מס' 5

פתרון:



א. (1) גרף I. הוא גרף הפונקציה $f(x)$, גרף II. הוא גרף הפונקציה $f'(x)$.

הסבר: נקודות האפס של פונקציה II. תואמות את

שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של פונקציה I.

תחומי החיוביות והשליליות של פונקציה II.

מתאימים לתחומי העלייה והירידה של פונקציה I.

(2) המרחק בין המשיקים בנקודות הקיצון של הפונקציה

$f(x)$ הנו ההפרש בין שיעורי ה- y של נקודות הקיצון, נסמן ב- x_B ו- x_G את שיעורי ה- x של

הנקודות B ו-G ונקבל $f(x_B) - f(x_G) = 0.84$, $x_B = x_C$, $x_G = x_F$,

השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f'(x)$ וציר ה- x :

$$S = \int_{x_C}^{x_F} -f'(x) dx = [-f(x)]_{x_C}^{x_F} = -f(x_F) + f(x_C) = f(x_B) - f(x_G) = 0.84$$

ב. (1) $\Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow x_B = 1$, $f(x) = 6\ln(x) + x^3 - 3x^2 - ax + b$

$$f'(x) = \frac{6}{x} + 3x^2 - 6x - a \Rightarrow 0 = 3 - a \Rightarrow a = 3$$

